

10. Cvičení z MA II. (26.4.2017)

Ještě parciální derivace.

1. Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací:

$$f(x, y) = xy \text{ pro } |x| \geq |y| \text{ a } f(x, y) = 0 \text{ pro } |x| < |y|$$

Tečná nadrovina. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ rozumíme graf fce T , $x \in \mathbb{R}^n$:

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

1. Anuloid $A = (x^2 + y^2 + z^2 + 12)^2 - 64(x^2 + y^2) = 0$ popište jako sjednocení grafů dvou fci dvou proměnných. Existuje k tomuto anuloidu tečná rovina v bodě $[0, 3, \sqrt{3}]$?

2. Nechť $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$.

Určete tečnu T , která je kolmá k přímce $\{[t, t, t] \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$. Ve kterém bodě protíná T přímkou $\{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$?

Derivace složených funkcí – řetízkové pravidlo.

3. Derivujte podle všech proměnných (derivace složených funkcí – řetízkové pravidlo):

(a) funkci $t \rightarrow u$, kde $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$

(b) funkci $t \rightarrow z$, kde $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$

(c) funkci $(r, \varphi) \rightarrow z$, kde $z = x^2y - xy^2$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

Lokální a globální extrémů funkce

Co to je Hessova matice funkce f v bodě a ? Co znamená, že je matice pozitivně / negativně (semi)definitní / indefinitní? Kdy to nastává?

Sylvestrovo kritérium: Kvadratická forma $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je

- (i) pozitivně definitní, jestliže všechny hlavní subdeterminanty matice jsou kladné;
- (ii) negativně definitní, jestliže hlavní subdeterminanty střídají znaménka (počínaje záporným);
- (iii) indefinitní, jestliže všechny hlavní subdeterminanty matice jsou nenulové a neplatí (i) ani (ii).

1. Najděte všechny lokální extrémů následujících funkcí:

(a) $f(x, y) = x(3 - x^2) - y^2$

(b) $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2}$

(c) $f(x, y, z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$

(d) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$

(e) $f(x, y) = 27xy^2 + 14x^3 - 69x - 54y$

2. Vyšetřete extrémy následujících funkcí na zadané množině:

(a) $f(x, y) = xy^2$ na $M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + y^2 = 1\}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na $M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + 2x + y^2 = 0\}$

Domácí úkol na 2.5.2017:

1. Nechť funkce $(u, v, w) \rightarrow f(u, v, w)$ má spoj. parc. der. 2. řádu na R^3 . Spočítejte parc. der. 2. řádu funkce $p(x, y, z) = f(x, xy, xyz)$.

2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x^2 + 7y^2) \cdot e^{-5x^2 - 2y^2}$ na R^2 .

3. Najděte všechny lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ na R^2 .

Řešení:

geometrie

1. $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$, $D_f : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 36$, spojitost na D_f , ex. parc. der. na okolí b. $[0, 3]$, jsou spoj. v b. $[0, 3]$

2. tečna $z = f(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}) - (x - \frac{2}{3}) - (y - \frac{5}{3})$, protíná x v b. $[0, 0, ? \frac{17}{2}]$
 $y = 0, x^2 + y^2 = 1$

Řešení:

1a. ostré lok. max. v b. $(1, 0)$, v b. $(-1, 0)$ není lok. extrém

1b. ostré lok. min. v b. $(1, 1)$, v b. $(0, 0)$ není lok. extrém

1c. ostré lok. max. v b. $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4})$, v b. $(0, 1, 0)$ není lok. extrém

1d. ostré lok. min. v b. $(\frac{1}{2}, 1, 1)$, ostré lok. max. v b. $(-\frac{1}{2}, -1, -1)$

1e. ostré lok. min. v b. $(1, 1)$, ostré lok. max. v b. $(-1, -1)$, v b. $(\pm \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{14}}{3})$ není lok. extrém

2a. ostré lok. max. v b. $(-1, 0), (\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm \sqrt{\frac{2}{3}})$, ostré lok. min. v b. $(1, 0), (-\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm \sqrt{\frac{2}{3}})$

2b. lokální=globální minimum v b. $(-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{1}{2})$, lokální=globální maximum v b. $(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\frac{1}{2})$