

7. Cvičení z MA I. (16.11.2016)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

1. Spočítejte následující limity:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n$ (i je imaginární číslo)
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\sqrt{n^7} + \sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7} - \sqrt[3]{n^7}} \right)$
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + \dots + n^3}{n^4}$

2. Dokažte, zda má následující rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu, případně ji spočítejte:

- (a) $a_1 = \sqrt{c}$ ($c > 0$, $c \in \mathbb{R}$), $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$
- (b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$
- (c) $a_1 = t$ ($t > 0$ je parametr), $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$

3. Určete limity v závislosti na parametrech $k, l \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$, $|b| < 1$:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k - (n-1)^l}{n^k + n^l}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k + n^{k-l} + \dots + n+1}{n^l + n^{l-l} + \dots + n+1}$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + a^{n-l} + \dots + a+1}{b^n + b^{n-l} + \dots + b+1}$

4. Zjistěte, pro která reálná čísla x je následující posloupnost monotonní:

$$\left\{ \left(\frac{x^3}{3x-2} \right)^n \right\}$$

Dů na 22.11.2016:

1. Určete limity v závislosti na $k, l \in \mathbb{N}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l}$
2. Spočítejte: $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$
3. Dokažte, že následující rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu a spočítejte ji: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$
(tip: rozdělte na liché a sudé členy)

Řešení:

1a. 2 1b. 0 1c. 0 1d. $\frac{2}{3}$ 1e. neex.

3. 1 pro $k > l$, -1 pro $k < l$, 0 pro $k = l$

4. konst. pro $x \in \{-2, 0, 1\}$, rost. pro $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{2}{3}; 1) \cup (1; +\infty)$, kles. pro
pro $x \in (-2; 0)$

Dú 1. 1 pro $k > l$, $(-1)^{1+l}$ pro $k < l$, $-\infty$ pro $k = l$ sudé, -1 pro $k = l$
liché

Dú 2. $\frac{1}{2}$