

2. Cvičení z MA I. (12.10.2016)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. Jak probíhá důkaz? Co je to přímý důkaz, nepřímý důkaz a co důkaz sporem?

1. Ukažte, že pro všechna $a, b \in R$ platí:

(a) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(b) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

(c) $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$

2. **AG nerovnost:** Pro kladná reálná x_1, \dots, x_n platí:

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

Dokažte pro $n = 2$.

B. Výroková logika

3. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

(a) $\forall x \in N \quad \exists y \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(b) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(c) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in R$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

4. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(a) $A \Rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A, \neg(A \& \neg B), \neg A \vee B$

(b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C, A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

5. Který z následujících výroků je silnější?

(a) $\forall x \in R \quad \exists K > 0, K \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

(b) $\exists K > 0, K \in R \quad \forall x \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

C. Jak probíhá důkaz **matematickou indukcí**?

6. Dokažte, že pro všechna přirozená n platí:

(a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$(c) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad (= \sum_{k=1}^n k)^2$$

$$(d) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n} \quad \text{pro } n \geq 2 \quad (e) \quad \text{Vypočítejte pro } x \in R: \quad \sum_{k=1}^n x^k$$

7. Dokažte tzv. de Morganova pravidla pro množiny A a B_i ($i = 1 \dots n$):

$$(a) \quad A \setminus \bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n (A \setminus B_i)$$

$$(b) \quad A \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n (A \setminus B_i)$$

8. Dokažte pro všechna přirozená n :

$$(a) \quad (2n)! < 2^{2n}(n!)^2 \quad (b) \quad n^2 \leq 2^n$$

9. Dokažte pro všechna přirozená n a reálná x taková, že $0 \leq x_k \leq \pi$:

$$|\sin(\sum_{k=1}^n x_k)| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k$$

Domácí úkol (termín 18.10.2016, 14:00):

Dokažte pro všechna přirozená n , kde e je základ přirozeného logaritmu:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

(Nápověda: Platí následující nerovnost $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$)

Bonus (těžké!!): Dokažte AG nerovnost pro všechna $x_i \in R, x_i \geq 0$ a $n \in N$:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$