1. Cvičení z MA I. (1.10. 2013)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Co je relace, zobrazení, funkce? Vlastnosti relace. Inverzní funkce.
Absolutní hodnota udává 'vzdálenost' (vlastnosti vzdálenosti).
Goniometrické funkce. Logaritmus a exponenciela.
Algebraické vzorce!!

1. Řešte rovnice a nerovnice v R:

(a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$ (b) $\frac{x+3}{x-1} \geq \frac{x+1}{x-5}$ (c) $|5x-2| < x$

(d) $\frac{|x+1|}{x-1} \geq x$ (e) $||x-2|+1| \leq 5$ (f) $|x^2-4x+3| \leq |x^2-4|$

(g) $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{3}{2}$ (h) $\log_a \sqrt{1000} = \frac{3}{2}$

(i) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0$ (j) $\cos^2 x > sin^2 x$

2. Určete reálná čísla a a b tak, aby graf funkce f procházel body A a B:

(a) $f(x) = a \cdot 2^x + b \quad A = [0; \frac{7}{2}],\ B = [-1; 2]$

(b) $f(x) = 2^{a+x} + b \quad A = [1; 15],\ B = [-2; 1]$

3. Nakreslete grafy funkcí:

(a) $||||x|-1|-1|-1|$, $||x-1|^2-1|$, $||x-1|-1|^2$

(b) $\cos x$, $\cos(x+\pi)$, $\cos(2x+\pi)$, $\sin|x|$, $|\sin x|$

(c) $\sin x^2$, $\sin\frac{1}{x}$, $\ln\sin x$, $\ln\ln\sin x$

4. Ukažte, že pro všechna $a, b \in R$ platí:

(a) $|a+b| \leq |a| + |b|$

(b) $||a|-|b|| \leq |a-b|$

(c) $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$

5. AG nerovnost: Pro kladná reálná $x_1, \dots x_n$ platí:

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

Dokažte pro $n = 2$.

6. Ukažte, že každý celočíselný obnos větší nebo roven 8 lze vyplatit pětikorunami a tříkorunami.

7. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

(a) $\forall x \in N \quad \exists y \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(b) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(c) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in R$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

8. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(a) $A \Rightarrow B,\ \neg B \Rightarrow \neg A,\ \neg(A \& \neg B),\ \neg A \vee B$

(b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C,\ A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

9. Který z následujících výroků je silnější?

(a) $\forall x \in R \quad \exists K > 0\ ,\ K \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

(b) $\exists K > 0\ ,\ K \in R \quad \forall x \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

Domácí úkol: Mějme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A, B \subset X$. Jaké musí mít f, A, B vlastnosti, aby platily následující vztahy?

(a) $\forall A \quad f^{-1}(f(A)) = A$

(b) $\forall A \quad f(f^{-1}(A)) = A$

(c) $\forall A, B \quad f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

(d) $\forall A, B \quad f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$

(e) $\forall A, B \quad f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$

(f) $\forall A, B \quad f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

Řešení:

1a. $(4;6\rangle$ 1b. $\langle-\infty;-7\rangle\cup(1,5)$ 1c. $(1/3;1/2)$ 1d. $\langle-\infty;1-\sqrt{2}\rangle\cup(1;1+\sqrt{2}\rangle$ 1e. $\langle-2;6\rangle$ 1f. $\langle 1-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{7}{4}\rangle\cup\langle 1+\frac{\sqrt{6}}{2};+\infty)$ 1g. $\frac{1}{8}$ 1h. $a=10$ 1i. $\langle 1;2\rangle$ 1j. $\bigcup_{k\in Z}\langle-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\rangle$

2a. $a=3,\ b=\frac{1}{2}$ 2b. $a=3,\ b=-1$