

4. Cvičení z MA I. (22. 10. 2013)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co je to posloupnost, monotónní posloupnost? Jaká je definice limity pro posloupnosti; nevlastní limita?

1. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti monotónní.

- (a) $\{ 2n + (-1)^n \}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\{ \frac{1}{1+n^2} \}_{n=1}^{\infty}$
(c) $\{ \frac{n+1}{n+2} \}_{n=1}^{\infty}$ (d) $\{ \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-2}} \}_{n=1}^{\infty}$

2. Spočítejte přímo podle definice limitu posloupnosti.

- (a) $\{ \frac{1}{1+n^2} \}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\{ \frac{n+1}{n+2} \}_{n=1}^{\infty}$ (domácí úkol)

3. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(-1)^n$
(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n!}$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$
(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5n}{-n^2+4n}$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5^n+10^n}{-2^{n+1}+5^{n+1}+10^{n+1}}$
(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2(n\pi/4)$ (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n^2$
(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$ (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$
(k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$
(m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+4n+n \sin n}{n \cos 3n+(2n+\sin n)^2}$ (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt[2]{n^3+1}}$

4. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{n+2} - \frac{n}{2}$
(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \lfloor xk \rfloor}{n^2}$ (parametr $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$... celá část x)
(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sqrt[3]{8n^6-n}}$

Domácí úkol (na 29.10.):

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{n^4}$ (1 bod)

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (1 bod)

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt[2]{n^3+1}}$ (1 bod)

Řešení:

1a. nekles. 1b. kles. 1c. rost. 1d. kles. (tady byla chyba)

2a. 0

3a. neex. 3b. $\cos 1$ 3c. 1 3d. 0 3e. -3 3f. $\frac{1}{10}$ 3g. neex. 3h. 0 3i. 0 3j. 0

3k. $\frac{1}{2}$ 3l. 1 3m. $\frac{1}{2}$ 3n. 0

4a. 1 4b. $-\frac{1}{2}$ 4c. $\frac{x}{2}$ 4d. $\frac{1}{4}$