

5. a 6. Cvičení z MA I. (29.10. a 5.11. 2013)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Rozcvička. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4+(-1)^n}{-7} \right)^n & \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \cos(n^2)) & \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} \\ \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 2}{2^n(3 - (-1)^n)} & \text{(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n) & \text{(f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{2n+5} - 3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+2} + \sqrt[3]{n^4}} \end{array}$$

1. Určete, čemu se rovnají limity pro $q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n, & \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot q^n & \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot q^n \\ \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}, a \in \mathbb{R}, a \geq 0 & \text{(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} & \text{(f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \\ \text{(g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} & \text{(h)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} & \text{(i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!} \end{array}$$

2. Spočítejte limity:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!} & \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} \cdot (2^n - n)}{(n^2 - n + 1)(n! + \ln n)} \\ \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n!}{n+1} & \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2n^n + n!}{(n+1)^4 + \sin n + (3n)!} \end{array}$$

Dú (na 5.11.): Spočítejte následující limity.

$$\begin{array}{l} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+ \\ (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \dots \sqrt[2^n]{2} \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot q^n \quad (\text{příklad 1c}) \end{array}$$

Dú (na 12.11.): Spočítejte následující limity.

$$\begin{array}{l} (1) \text{ Vyberte si jeden z příkladů (1g)-(1i) a spočítejte limitu (dokažte! 2 body)} \\ (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2n^n + n!}{(n+1)^4 + \sin n + (3n)!} \quad (\text{příklad 2d, 1 bod}) \end{array}$$

Řešení:

Ra. 0 Rb. $+\infty$ Rc. 0 Rd. 0 Re. $-\frac{1}{4}$ Rf. $\sqrt{2}$

1a. 1b. 1c. 1d. 1 1e. 1 1f. $+\infty$ 1g. 0 1h. 0 1i. 0

2a. 0 2b. 0 2c. 0 2d. 0