2. Cvičení z MA I. (8. 10. 2013)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

A. PŘIROZENÁ, RACIONÁLNÍ a REÁLNÁ ČÍSLA

1. Dokažte, že racionálních čísel je spočetně (tj. že existuje bijekce mezi přirozenými a racionálními čísly, $N \leftrightarrow Q$).

B. Jak probíhá důkaz MATEMATICKOU INDUKCÍ?

1. Dokažte, že pro všechna přirozená n platí:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 \qquad (= \sum_{k=1}^{n} k)^2$

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ pro $n \geq 2$ (e) Vypočítejte pro $x \in R$: $\sum_{k=1}^{n} x^k$

2. Dokažte tzv. de Morganova pravidla pro množiny A a B_i $(i = 1 \,..\, n)$:

(a) $A \setminus \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$

(b) $A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$

3. Dokažte pro všechna přirozená n:

(a) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ (b) $n^2 \leq 2^n$

4. Dokažte pro všechna přirozená n a reálná x taková, že $0 \leq x_k \leq \pi$:

$$|\sin(\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$$

Bonus: Dokažte AG nerovnost pro všechna $x_i \in R, x_i \geq 0$ a $n \in N$:

$$\sqrt[n]{\textstyle\prod_{i=1}^{n} x_i} \;\leq\; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

C. VÝROKOVÁ LOGIKA (ještě z minulé hodiny)

8. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

(a) $\forall x \in N \quad \exists y \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(b) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(c) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in R$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

9. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(a) $A \Rightarrow B,\ \neg B \Rightarrow \neg A,\ \neg(A \& \neg B),\ \neg A \vee B$

(b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C,\ A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

10. Který z následujících výroků je silnější?

(a) $\forall x \in R \quad \exists K > 0\ ,\ K \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

(b) $\exists K > 0\ ,\ K \in R \quad \forall x \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

Domácí úkol: Dokažte pro všechna přirozená n, kde e je základ přirozeného logaritmu:

$$(\tfrac{n}{e})^n \leq n! \leq (\tfrac{n+1}{2})^n$$

(Nápověda: pro horní odhad lze užít AG nerovnost; dále platí $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$)