12. Cvičení z MA I. (17.12.2013 a 7.1.2014)

Co je to derivace? Jaké znáte věty pro derivace, k čemu se využívá? Jak se počítá derivace – aritmetika derivací, derivace složené funkce, derivace inverzní funkce. Co je jednostranná derivace a jak se počítá?

1. Určete ve všech bodech definičního oboru funkcí, zda existují (jednostranné) derivace, případně čemu se rovnají. Lze tyto funkce spojitě rozšířit?

(a) $\operatorname{sgn} x$ (b) $|x|$ (c) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$ (d) $|\frac{x-1}{1-2x}|$ (e) $\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$

(f) $\sqrt[3]{(1-\exp(1-x^2))^2}$ (g) $\sqrt{1-\exp(-x^2)}$ (h) $(\sin x)^{|\cos x|}$

2. Najděte extrémy funkcí.

(a) $x\sqrt{2-x^2}$ (b) $\sin^3 x + \cos^3 x$ (c) $\arccos\left(\frac{-x^2-x+2}{4}\right)$

(d) $|\frac{x}{1+x^2}|$ (e) $2\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Ještě další derivace:

(a) $\arcsin|\frac{5x+2}{3x-6}|$ (b) $\sqrt{\sin x \cos x}$ (c) $\sqrt{\operatorname{arctg}(\ln^2 x)}$

4. A ještě nějaké limity – l'Hospitalovo pravidlo:

(a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^k}$ (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(-\frac{1}{x^2})}{x}$ (c) $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg}^2 x)^{\sin^2 x}$

(d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ (e) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}$ (f) $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1-\frac{2}{x})$

(g) $\lim_{x\to 0_+}\sqrt{x}\ln\sqrt{x}$ (h) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ (i) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Dú. Vypočtěte derivace funkcí (včetně jednostranných):

(a) $f(x) = (x-a)^2(x-b)^2$ pro $x \in < a, b >$, $f(x) = \frac{1}{e}$ pro všechna ostatní x

(b) $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ pro $|x| \leq 1$, $g(x) = \frac{1}{e}$ pro $|x| > 1$

Výsledky:

1a. $x \in R - \{0\} : f'(x) = 0, f'(0) = +\infty$
1b. $x \in R - \{0\} : f'(x) = \text{sgn } x, f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$
1c. $x \in (-\infty; -1) \cup (1; = \infty) : f'(x) = \frac{x}{x^4-1}$
1d. $x \in R - \{\frac{1}{2}, 1\} : f'(x) = \text{sgn } (\frac{x-1}{1-2x})\frac{-1}{(1-2x)^2}, f'_+(1) = 1, f'_-(1) = -1$
1e. $x \in (1, +\infty) : f'(x) = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x}\ln x\right)$; lze spoj. rozš. v 1: $\overline{f}(1) = 0$
1f. $x \in R - \{-1, 1\} : f'(x) = \frac{4}{3}\frac{xe^{(1-x^2)}}{\sqrt[3]{1-e^{1-x^2}}}, f'_+(1) = +\infty = f'_-(-1), f'_-(1) = -\infty = f'_+(-1)$
1g. $x \in R - \{0\} : f'(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}, f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$
1h. $x \in \cup(2k\pi; (2k+1)\pi) : f'(x) = (\sin x)^{|\cos x|}\text{sgn } (\cos x)\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln(\sin x)\right)$; lze spoj. rozš. na $\cup < 2k\pi; (2k+1)\pi >$: $\overline{f}(2k\pi) = \overline{f}((2k+1)\pi) = 0$
??? jednostranná derivace v krajních bodech ???
2a. $D_f =< -\sqrt{2}; \sqrt{2} >; \min f(x) = f(-1) = -1, \max f(x) = f(1) = 1$
2b. $D_f = R; \min f(x) = f(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi) = f((2k+1)\pi) = -1, \max f(x) = f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = f(2k\pi) = 1$; lokální maxima v b. $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, lokální minima v b. $\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$
2c. $D_f =< -3; 2 >; \min f(x) = f(-\frac{1}{2}), \max f(x) = f(-3) = f(2)$
2d. $D_f = R; \min f(x) = f(0) = 0, \max f(x) = f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$
2e. $D_f =< -1; 1 >; \max f(x) = f(\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$;
minima nenabývá (lze sp. rozš.: $\overline{f}(-1) = -\frac{\pi}{2}, \overline{f}(1) = \frac{\pi}{2}$; $\overline{f}$ nabývá min. v b. -1)
3a. $D_f =< -4, \frac{1}{2} >; f'(x) = \frac{6\text{sgn } (5x+2)}{(x-2)\sqrt{2(x+4)(1-2x))}}$ pro $x \neq -\frac{2}{5}$; $f'_+(-\frac{2}{5}) = +\frac{25}{36}, f'_-(-\frac{2}{5}) = -\frac{25}{36}, f'_+(-4) = -\infty, f'_+(\frac{1}{2}) = +\infty$
3b. $D_f = \cup < k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi >; f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{\sin x \cos x}}$ pro $x \in \cup(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$‘ $f'_+(2k\pi) = +\infty = f'_+(\pi + 2k\pi), f'_-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -\infty = f'_-(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$
3c. $D_f = (0, +\infty); f'(x) = \frac{\ln x}{x(1+\ln^4 x)\sqrt{\text{arctg } (\ln^2 x)}}$; pro $x \neq 1$; $f'_+(1) = 1, f'_-(1) = -1$
Dú. $f'(x) = 2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$ pro $x \in (a, b)$; $f'_+(a) = f'_-(a) = f'_+(b) = f'_-(b) = 0$; $f'(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, a) \cup (b, \infty)$
Dú. $g'(x) = 2xe^{-x^2}(1-x^2)$ pro $x \in (-1, 1)$; $f'_-(1) = f'_+(1) = f'_+(-1) = f'_-(-1) = 0$; $f'(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$