

## 7. Cvičení z MA I. (12.11.2013)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

**Rozcvička.** Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 3}) \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - 5 \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor) \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - 5 \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor)}{n}$$

1. Spočítejte následující limity:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n} \cdot \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n \quad (i \text{ je imaginární číslo})$$
$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{\sqrt{n^7} + \sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7} - \sqrt[3]{n^7}} \right)$$
$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad (f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + \dots + n^3}{n^4}$$

2. Dokažte, že následující rekurentně zadaná posloupnost  $\{a_n\}$  má limitu a spočítejte ji:

$$(a) \quad a_1 = \sqrt{c} \quad (c > 0, c \in R), \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad \text{pro každé } n \in N$$
$$(b) \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad \text{pro každé } n \in N$$
$$(c) \quad a_1 = t \quad (t > 0 \text{ je parametr}), \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right) \quad \text{pro každé } n \in N$$

3. Určete limity v závislosti na parametrech  $k, l \in N, a, b \in R, |a| < 1, |b| < 1$ :

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k - (n-1)^l}{n^k + n^l} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k + n^{k-l} + \dots + n+1}{n^l + n^{l-l} + \dots + n+1}$$
$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + a^{n-l} + \dots + a+1}{b^n + b^{n-l} + \dots + b+1}$$

**Dů na 19.11.2013:**

1. Zjistěte, pro která reálná čísla  $x$  je následující posloupnost monotonní:  $\left\{ \left( \frac{x^3}{3x-2} \right)^n \right\}$
2. Určete limity v závislosti na  $k, l \in N$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l}$
3. Spočítejte:  $\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$

**Dů na 3.12.2013:**

1. Dokažte, že následující rekurentně zadaná posloupnost  $\{a_n\}$  má limitu a spočítejte ji:  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$   
(tip: rozdělte na liché a sudé členy)

Co je to řada? Co říká podílové a odmocninové kritérium? A Leibnizovo kritérium? Rozhodněte, zda následující řada konverguje.

2.  $1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \dots$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$

**Řešení:**

1a. 2   1b. 0   1c. 0   1d.  $\frac{2}{3}$    1e. neex.   1f.  $\frac{1}{4}$

3. 1 pro  $k > l$ ,  $-1$  pro  $k < l$ , 0 pro  $k = l$

Dú 1. konst. pro  $x \in \{-2, 0, 1\}$ , rost. pro  $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{2}{3}; 1) \cup (1; +\infty)$ ,  
kles. pro  $x \in (-2; 0)$

Dú 2. 1 pro  $k > l$ ,  $(-1)^{1+l}$  pro  $k < l$ ,  $-\infty$  pro  $k = l$  sudé,  $-1$  pro  $k = l$   
liché

Dú 3.  $\frac{1}{2}$