

3. Cvičení z MA I. (15. 10. 2013)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. Co to je těleso reálných čísel?

1. Dokažte, že pro $\forall x \in R, \forall y \in R, \forall n \in N$ platí (z axiomů pro reálná čísla):

(a) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

(b) $-x = (-1) \cdot x$

(c) $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

(d) $(0 \leq x < y) \Rightarrow x^n < y^n$

2. Příklad konečného tělesa.

3. Příklad uspořádání podle dělitelnosti.

B. Co je to supremum, infimum, maximum, minimum? Příklad množiny, která má supremum, ale ne maximum; příklad množiny bez suprema.

1. Najděte suprema a infima následujících množin v R (pokud existují); existují pro ně maxima a minima?

(a) $A_1 = \{-\frac{1}{n}; n \in N\}$

(b) $A_2 = \{\frac{n+(-1)^n}{n}; n \in N\}$

(c) $A_3 = \{n^{(-1)^n}; n \in N\}$

(d) $A_4 = \{q < \sqrt{3}; q \in Q\}$

(e) $A_5 = \{\frac{p}{p+q}; p, q \in N\}$

(f) $A_6 = \{n^2 - m^2; m, n \in N \text{ \& } n > m\}$

2. Mějme množinu X a množinu čísel opačných, tedy $-X = \{-x \mid x \in X\}$. Dokažte, že platí

$$\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$$

3. Příklad suprema podle dělitelnosti.

Bonus. Běžná definice suprema množiny $M \subseteq T$ říká, že je to číslo $s \in T$, které je nejmenší horní závorou.

(Tj. (i) $\forall x \in M : x \leq s$ a (ii) $\forall y \in T, y < s \exists x_y \in M : y < x_y$).

Záleží na požadavku, že $y \in T$? Co kdybychom požadovali pouze $y \in M$?

Najděte rozdíl (např. na konkrétním příkladu množiny M).

Domácí úkol 1. Najděte (pokud existují) supremum a infimum množiny $B \subset R$, $B = \{\sin x \cos x; x \in R\}$; existuje pro ni maximum a minimum? (1 bod)

Domácí úkol 2. Spočítejte přímo podle definice limitu posloupnosti $\{\frac{n+1}{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$ (1 bod)

Domácí úkol 3. Spočítejte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$ (1 bod)

Řešení:

1a. $\sup A_1 = 0, \inf A_1 = -1 = \min, \max$ neex.

1b. $\sup A_2 = \frac{3}{2} = \max, \inf A_2 = 0 = \min$

1c. $\sup A_3$ neex., $\inf A_3 = 0, \min$ neex.

1d. $\sup A_4 = \sqrt{3}, \inf, \max, \min$ neex.