

5. Cvičení z MA II. (17.3.14)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

1. Spočítejte primitivní funkce:

- (a) $\int x^n \ln x \, dx$ (b) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx$ (c) $\int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} \, dx$
(d) $\int \sin x \cdot \sqrt{2 + \cos x} \, dx$ (e) $\int \frac{e^{5x}-1}{e^{2x}} \, dx$ (f) $\int x \cdot \sqrt{x^2+1} \, dx$
(g) $\int x \cdot \sqrt{2-3x^2} \, dx$ (h) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} \, dx$ (i) $\int \frac{1}{x^2-1} \, dx$
(j) $\int \frac{5x}{2x+3} \, dx$ (k) $\int \sin x \cos 2x \, dx$ (l) $\int \sin x \sin 2x \, dx$

2. Příklady na substituci II:

- (a) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx$ (b) $\int \frac{1}{x+2\sqrt{x+2}} \, dx$ (c) $\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})} \, dx$

3. Důležité příklady:

- (a) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$ (na $(0, \pi)$, např. užíjte substituci $\tg \frac{x}{2} = t$)
(b) $\int \frac{1}{1+3\sin^2 x} \, dx$ (na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, užíjte např. substituci $\tg x = t$)
(c) $\int \frac{1}{x+(\sqrt{x^2+x+1})} \, dx$ (Nápověda: zkuste substituci $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$)

4. A další příklady na určování primitivní funkce:

- (a) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} \, dx$ (b) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} \, dx$
(c) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2} \, dx$ (d) $\int \cos^2 x \, dx$ (e) $\int \frac{1+\tg^2 x}{1+\tg x} \, dx$

Domácí úkol na 22. 3. 2013:

- (1) $\int \frac{x^{17}-5}{x-1} \, dx$
(2) $\int \log(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$
(3) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x(1-\cos x)} \, dx$

Zopakovat/naučit se/pochopit, jak fungují standardní substituce $t = \tg \frac{x}{2}$, $t = \tg x$ a eulerova substituce $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{ax}+t$ nebo $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}$, (pokud ax^2+bx+c nemá R kořeny a $a > 0, c > 0$).

Řešení: (až na c)

2a. $2\sqrt{x} - 2\log|1 + \sqrt{x}|$ na $(0, +\infty)$

2b. $\log(x + \sqrt{x} + 2) - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x} + 1)$ na $(0, +\infty)$

2c. $3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\log\sqrt[6]{x} + 6\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\frac{1}{\sqrt{x}}$ na R

3a. $\log \operatorname{tg} \frac{x}{2} \equiv \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$, na $(0, \pi)$

3b. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \cdot \operatorname{tg} x)$, na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

3c. $\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 2\log|\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2| - \frac{1}{2} \log|2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1|$, na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, \infty)$

4a. $\frac{-10 \cdot 5^{-x} \log 2 + 2^{-x} \log 5}{5 \log 5 \log 2}$, na R

4b. $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$, na R

4c. $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \log|e^x - 1| + \frac{1}{6} \log(e^x + 2)$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$

4d. $\frac{1}{2}(\sin x \cos x + x)$, na R

4e. $\ln|1 + \operatorname{tg} x|$ na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi)$ a na $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

Dú1. $\sum_1^{17} \frac{x^k}{k} - 4\log|x - 1|$, na $(-\infty, 1)$ a na $(1, \infty)$

Dú2. $x \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1}$, na R

Dú3. $-\frac{1}{4} \log(1 + \cos x) - \frac{3}{4} \log(1 - \cos x) + \frac{1}{2(\cos x - 1)}$ na $(k\pi, (k + 1)\pi)$
 $= -\frac{3}{2} \log|t| - \frac{1}{4t^2} + \log|1 + t^2|$, kde $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$