Hynek Schlindenbuch
NMAI055 - cvičení 1, domácí úkol

Tvrdím, že $\forall n \in \mathbb{N}$ se dá postavit nejvyšší možný sněhulák rozdělením základní koule o objemu $V \in \mathbb{R}^+$ v případě, že ji rozdělím na n stejně velkých koulí.
Dokážu to matematickou indukcí podle n:
I. pro $n = 1$ to očividně platí, pokud nevyberu celou základní kouli, tak bude mít sněhulák menší objem a protože se skládá z jedné koule tak tedy i menší výšku.
II. předpokládám, že tvrzení platí pro n a dokážu, že pak musí platit i pro $n + 1$:
Definuji si funkci $f(x)$, takovou, že mi pro parametr x určující poloměr jedné koule vybrané ze základní koule vrátí výšku nejvyššího sněhuláka, který lze v takovém případě postavit z již vybrané koule a n dalších koulí vybraných ze zbytku základní koule (podle indukčního předpokladu, tz. všechny stejně velké).
$f(x) = 2x + 2n\sqrt[3]{\frac{\frac{3(V-\frac{4}{3}\pi x^3)}{n}}{4\pi}}$
$D_f = (0, \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}})$
V a n je libovolné pevné.
Nyní zjistím pro jaké x nabývá $f(x)$ maxima.
Spočítám první derivaci: $f'(x) = 2 + 2n\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3V-4\pi x^3}{4\pi n}}^2}\frac{(-12\pi x^2)4\pi n}{16\pi^2 n^2} = 2 - \frac{2x^2}{\sqrt[3]{\frac{3V-4\pi x^3}{4\pi n}}^2}$
$f'(x)$ není definovaná pro $x = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, což je zároveň krajní bod definičního oboru $f(x)$
Zjistím, pro jaké x platí $f'(x) = 0$:
$\frac{2x^2}{\sqrt[3]{\frac{3V-4\pi x^3}{4\pi n}}^2} = 2$
$x^2 = \sqrt[3]{\frac{3V-4\pi x^3}{4\pi n}}^2 \quad / \sqrt[2]{}, ()^3$
$x^3 = \frac{3V-4\pi x^3}{4\pi n}$
$x = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi(n+1)}}$
Podezřelé body: 0, $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi(n+1)}}$
$f(0) = 2n\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi n}}, f(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}) = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}, f(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi(n+1)}}) = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi(n+1)}} + 2n\sqrt[3]{\frac{\frac{3nV}{n+1}}{4\pi n}}$
Porovnám funkční hodnoty v podezřelých bodech:
$2n\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi n}} \leq 2\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi(n+1)}} + 2n\sqrt[3]{\frac{\frac{3nV}{n+1}}{4\pi n}}$ /vytknu a pokrátím $2\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, v poslední $\sqrt[3]{}$ zkrátím n
$n\sqrt[3]{\frac{1}{n}} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{(n+1)}} + n\sqrt[3]{\frac{1}{n+1}}$
$\frac{n}{\sqrt[3]{n}} \leq \frac{n+1}{\sqrt[3]{n+1}}$ / převedu odmocniny na druhou stranu (jsou určitě kladné)
$\sqrt[3]{n^4 + n^3} \leq \sqrt[3]{n^4 + 3n^3 + 3n^2 + n}$
To už očividně platí. Porovnám tedy ještě s druhým podezřelým bodem:
$2\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \leq 2\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi(n+1)}} + 2n\sqrt[3]{\frac{\frac{3nV}{n+1}}{4\pi n}}$ / vytknu a zkrátím $2\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$
$1 \leq \sqrt[3]{\frac{1}{n+1}} + n\sqrt[3]{\frac{1}{n+1}}$
$1 \leq \frac{n+1}{\sqrt[3]{n+1}} = \sqrt[3]{n+1}^2$
Pro $n = 1$ nerovnost platí, a odmocnina je rostoucí, takže bude platit i pro vyšší čísla.

Zjistím tedy, že funkce nabývá maxima pro $x = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi(n+1)}}$.
Z toho vyplývá, že abych dostal nejvyššího sněhuláka z $n+1$ koulí, tak musí mít první koule stejný objem jako ty ostatní ($\frac{V}{n+1}$) a tím pádem mám tvrzení dokázáno.
Nyní si za V dosadím objem koule s poloměrem 1m, $V :=\precapprox \frac{4\pi}{3}$.
Vím, že pro maximální výšku musí být všechny koule stejné, tudíž vydělím V počtem koulí(3) a zjistím poloměr jedné koule.
$r = \sqrt[3]{\frac{\frac{3V}{3}}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$
Maximální výška sněhuláka ze tří koulí vyrobených ze základní koule s poloměrem 1m tedy je $\frac{6}{\sqrt[3]{3}}$m (obecně $2n\sqrt[3]{\frac{\frac{3V}{n}}{4\pi}}$m pro n koulí a objem základní koule V)