3. Cvičení z MA II. (3.3.2014)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Ještě derivace
Rolleova a Lagrangeova věta o střední hodnotě (a důsledky).
Zobecněná Rolleova věta: Nechť f je spojitá fce na intervalu $[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$, derivace f v každém bodě (a, b) existují a rovnají se 0, a to až do n-té, a $(n+1)$-ní derivace f existuje na (a, b). Pak existuje v (a, b) bod, v němž je $(n + 1)$-ní derivace nulová.

Primitivní funkce
Co jsou to primitivní funkce? Jaké má vlastnosti (spojitost)? Kdy má funkce primitivní funkci (spojitost)?

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Rozcvička:

(a) $\int x^3+2x+\frac{16}{x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int 18e^x+16e^{8x}-\frac{1}{x}+3\cos x\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int(3e^x+\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ (e) $\int(\frac{1}{\cos^2 x}+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ (f) $\int\frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int(\sqrt[3]{x}+x^2)\,\mathrm{d}x$ (h) $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ (i) $\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(j) $\int\frac{1}{(3x^2-2x-1)}\,\mathrm{d}x$

2. 'Lepení' primitivních funkcí:

(a) $\int|x|\,\mathrm{d}x$ (b) $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(x) = 0$ $(x \le 0)$, $f(x) = x$ $(x > 0)$

(c) $\int\sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ (d) $\int|\cos x|\,\mathrm{d}x$

Domácí úkol na 10.3.2014
Vypočítejte na celém intervalu, kde to dává smysl:

(1) $\int\frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x$, kde $n \in N, a \in R$

(2) $\int|\sin x+\cos x|\,\mathrm{d}x$

(3) $\int 5^x\sin x\,\mathrm{d}x$

Zopakovat/naučit se/pochopit metodu per partes a obě metody substituce.

Řešení: (až na c)

1a. $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 16\log|x|$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$
1b. $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3\sin x$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$
1c. $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2}$, na R
...
1j. $\frac{1}{4}\log|\frac{x-1}{3x+1}|$, na $(-\infty, -\frac{1}{3})$ a na $(-\frac{1}{3}, 1)$ a na $(1, \infty)$

2a. $\mathrm{sgn}(x) \cdot \frac{x^2}{2}$, na R
2b. $F(x) = c$ na $< -\infty, 0 >$, $F(x) = \frac{x^2}{2}$ na $< 0, \infty >$
2c. $\frac{1}{4}|x| \cdot x^3$, na R
2d. $(-1)^k \sin x + 2k$, na $x \in < -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi >, k \in Z$
2e. $(-1)^k(-\cos x + \sin x) + 2k\sqrt{2}$, pro $x \in < -\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + (k+1)\pi >$ pro $\forall k \in Z$

Dú:
1. $\frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}$, na $(-\infty, a)$ a na (a, ∞) pro $n > 1$; $\log(x-a)$, na (a, ∞) pro $n = 1$; $\log(a-x)$, na $(-\infty, a)$ pro $n = 1$
3. $\frac{5^x}{1+\log^2 5}(\log 5 \cdot \sin x - \cos x)$, na R