8. Cvičení z MA II. (7. 4. 2014)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Spojitost. Jak se definuje spojitá funkce (různé definice)?

1. Ukažte, že polynomy více proměnných jsou spojité funkce $P : R^n \to R$.

2. Zkoumejte následující funkce na (R^n, eukleid. metrika) – určete definiční obor (jde o ot. či uz. množinu?), spojitost, vrstevnice. Nabývají tyto funkce na svém definičním oboru globálního maxima a minima?

(a) $f(x,y) = \sqrt{\log(x-y)}$ (b) $f(x,y) = \log(\sqrt{y+1} - x)$

(c) $f(x,y) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} - 1}$ (d) $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2} - 1}$

(e) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (f) $f(x,y) = \frac{x}{y}$

(g) $f(x,y) = \arcsin xy$ (h) $f(x,y) = \arcsin \frac{y}{x+1}$

3. Jsou následující fce spojité? Nabývají na R^2 své největší a nejmenší hodnoty? Jaké?

(a) $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$, $f(0,0) = 0$

(b) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$, $f(0,0) = 0$

4. Lze následující funkce spojitě rozšířit na R^2?

(a) $f(x,y) = (x+y)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(b) $f(x,y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(c) $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

Parciální derivace. Nechť $f : G \subset R^n \to R$, G je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0,\dots,0,1,0,\dots 0]$ je i-tý vektor kanoniclé báze R^n. *Parciální derivací fce f podle i-té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).

Značení: $C^1(G)$ …množina fcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojité parc.

derivace podle všech proměnných (tj. fce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité jako fce n proměnných).

5. Určete definiční obor následujících funkcí na R^n, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují:

(a) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+4y^2}+1$

(c) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ pro $[x,y] \neq 0$, $f(0,0) = 0$

(d) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pro $[x,y] \neq 0$, $f(0,0) = 0$

6. Určete definiční obor následujících funkcí a vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu všude, kde existují. Nalezněte rovnici tečné nadroviny v zadaných bodech:

(a) $f(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z$, v bodě $[e,1,2,e^2]$

(b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{x+y}$, v bodě $[1,1,f(1,1)]$

Domácí úkol na 14. 4. 2014: U příkladů (1) a (2) vyšetřete spojitost. Lze dané funkce spojitě dodefinovat na R^2?

(1) $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$

(2) $f(x,y) = \frac{\sin x+\sin y}{x+y}$

(3) Ukažte, že je-li funkce f spojitá na R^n, potom množina $M = \{x \in R^n; f(x) < 0\}$ je otevřená.

Řešení:
2a-h. spojité na svých definičních oborech

3a. není spojitá v b. $[0,0]$, omezená **3b.** spojitá, není omezená
4a. spojitá pro $f([0,0]) := 0$ **4b.** spojitá pro $f([0,0]) := 0$ **4c.** nelze spojitě dodefinovat v b. $[0,0]$
5a. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{y\cdot\mathrm{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}}$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0,$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{x\cdot\mathrm{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}}\cdot$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0,$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neex. pro $y \neq 0,$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ pro $y \neq 0,$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ pro $x \neq 0,$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neex. pro $x \neq 0$

5b. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0],$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{8y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0],$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neex., $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neex.

5c. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0],$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0],$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

5d. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ pro $[x,y] \neq [0,0],$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ pro $[x,y] \neq [0,0],$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

6a. $T(x,y,z) = e^2 + 2e(x-e) - 2e^2(y-1) + e^2(z-2),\ \ D_f : x\cdot y > 0$
6b. $2z - x + y = 0,\ \ D_f : x \neq -y$

Dú 1. není spojitá v b. $[0,0]$, omezená
Dú 2. spojitá pro $f([a,-a]) := \cos a \quad \forall a \in R$