

## 1. Cvičení z MA II. (17.2.2014)

### Aplikace průběhů funkcí

1. Jak se pomocí derivace pozná, kde má funkce maximum/minimum? Kde je rostoucí/klesající?

- (a) Který z obdélníků o obvodu  $l$  má největší obsah?
- (b) Který z válců o objemu  $V$  má nejmenší povrch?
- (c) Z čtvercového listu papíru odstříhneme v rozích malé čtverce a složíme krabíčku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstříhnout, aby vzniklá krabíčka měla co největší objem?
- (d) Jak velký sněhulák (ze tří koulí) lze vyrobit z koule o poloměru 1 metr?  
Tip: použijte Jensenovu nerovnost: pro konvexní funkci  $f$  a čísla  $\alpha_i$ ,  $x_i$  taková, že  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_i \alpha_i = 1$  platí, že

$$f\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i).$$

- (e) Z chodby o šířce  $A$  odbočuje chodba o šířce  $B$ . S jak dlouhou tyčí je možno zatočit? (Pro jednoduchost: tyč chceme nést vodorovně.)

### Taylorův polynom

Co je Taylorův polynom funkce  $f$  v zadaném bodě  $a$  (značení  $T_n^{f,a}$ )? Jak je tento polynom charakterizován (pro  $x \rightarrow a$ )?

2. Najděte Taylorův polynom řádu 5 v bodě 0 pro funkci  $\operatorname{tg}$ .

3. Najděte Taylorův polynom řádu  $n$  v bodě 0 pro následujících funkce. Konverguje tento polynom k zadané funkci (tj. pro  $n \rightarrow \infty$ )? Pro jaká  $x$ ?

- (a)  $f(x) = e^{-x^2}$
- (b)  $f(x) = xe^{2x}$
- (c)  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  pro  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$
- (d)  $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$
- (e)  $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$
- (f)  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
- (g)  $f(x) = \log 2$  odhadněte polynomem  
(použijte např. fci  $\log(1+x)$  nebo fci  $-\log(1-x)$ )

4. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limity:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$       (c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}))$ .

5. Spočtěte přibližně (můžete bez odhadu chyby) následující čísla:  $\sin 0.1$ ,  $\cos 0.1$ ,  $\sqrt{0.98}$ ,  $\sqrt[3]{1279.03}$ ,  $e^{0.01}$ ,  $\log 1.2$ ,  $\log 2$ ,  $\sqrt[12]{1.03}$ ,  $1.01^5$ ,  $\dots$

**Domácí úkol na 24.2.2014:**

Zopakujte si odhady chyb u aproximace pomocí Taylorova polynomu.

1. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

2. Rozved'te následující funkci v řadu:

$$y(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$$

3. Spočtěte jeden z příkladů ze cv. 5 výš.

Začneme s integrály!!

**Řešení:**

**1.**  $T_5^{\text{tg},0}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$

**3a.**  $\sum_{n=0}^{N/2} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{-x^{2n}}{n!}$

**3b.**  $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$ , pro  $x \in R$

**3c.**  $\sum_{n=0}^N 0 \cdot x^n = 0$  nekonverguje k  $f(x)$ ,  $x \neq 0$

**3d.**  $\sum_{n=0}^{(N-1)/2} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ , na  $(-3, 3)$

**3e.**  $2 \cdot \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}}$  pro  $|x| < 1$

**3f.**  $\sum_{n=0}^N (n+1)x^n$ , na  $(-1, 1)$

**3g.**  $\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

**4.**  $y(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^{(4k)}$

**7.** 0.099 833, 0.995 004, 0.989 949, 12.002 3, 1.010 050, 0.182 321, 0.693 147, 1.002 466, 1.051 010