11. cvičení z MA II. (5.5.2014)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Tečná nadrovina. Nechť $G \subset R^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. *Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$* rozumíme graf fce T, $x \in R^n$:

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

1. Anuloid $A = (x^2 + y^2 + z^2 + 12)^2 - 64(x^2 + y^2) = 0$ popište jako sjednocení grafů dvou fcí dvou proměnných. Existuje k tomuto anuloidu tečná rovina v bodě $[0, 3, \sqrt{3}]$?

2. Nechť $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$.
Určete tečnu T, která je kolmá k přímce $\{[t, t, t] \in R^3; t \in R\}$. Ve kterém bodě protíná T přímku $\{(0, 0, t) \in R^3; t \in R\}$?

Věta o implicitních funkcích.

1. Je zadaná funkce $F(x, y)$ a dvě čísla x_0, y_0 taková, že $F(x_0, y_0) = 0$. Dokažte, že v nějakém okolí U bodu (x_0, y_0) existuje funkce $f = f(x)$ splňující podmínky $f(x_0) = y_0$ a $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Určete $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.

(a) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4$, $(x_0, y_0) = (6, 2)$

(c) $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$

2. Funkce $f = f(x, y)$ je dána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ a podmínkou $f(x_0, y_0) = z_0$. Určete derivace f podle všech proměnných (a vypočítejte pro zadané body).

(a) $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 2z + 3$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, -2)$

(b) $F(x, y, z) = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$

(c) $F(x, y, z) = e^z + x^2 y + z + 5$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, -6, 0)$

3. Ukažte, že zadanou množinu M lze na okolí daného bodu a popsat jako graf funkce f. Spočtěte její (parc.) derivace prvního a druhého řádu v příslušném bodu.

(a) $M = \{(x, y) \in R^2;\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$ v okolí b. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

(b) $M = \{(x, y) \in R^2;\ \log \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\}$ v okolí b. $(1, 0)$, kde $f(1) = 0$

(c) $M = \{(x,y,z) \in R^3;\; x \sin z + y \cos z - e^z = 0\}$ v okolí b. $(2,1,0)$, kde $f(2,1) = 0$. Napište rovnici její tečny v b. $(2,1,0)$.

Co to je **lokální / globální extrém funkce** $f : G \to R$ ($G \subset R^n$ otevřená)? Jaké jsou nutné podmínky pro to, aby fce měla v bodě a extrém? Co to jsou stacionární body?

4. Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = x^2 + |\text{arctg}\, y| - x^8$

(b) $f(x,y) = (|x| + |y|)^2 - (|x| + |y|)^4$

(d) $f(x,y) = xy \log(x^2 + y^2)$

Domácí úkol na 12.5.2014:

(1) Je zadaná funkce $F(x,y)$ a dvě čísla x_0, y_0 taková, že $F(x_0,y_0) = 0$. Dokažte, že v nějakém okolí U bodu (x_0,y_0) existuje funkce $f = f(x)$ splňující podmínky $f(x_0) = y_0$ a $F(x,f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Určete $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.

$$F(x,y) = x \sin y - \cos y + \cos 2y, \quad (x_0,y_0) = (1,0) \qquad \text{[1 bod]}$$

(2) Najděte všechny lokální extrémy funkce f:
$f(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ [2 body]

Řešení:
geometrie
1. $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$, $\quad D_f : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 36$, spojitost na D_f, ex. parc. der. na okolí b. $[0,3]$, jsou spoj. v b. $[0,3]$

2. tečna $z = f(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}) - (x - \frac{2}{3}) - (y - \frac{5}{2})$, protíná x v b. $[0,0,?\frac{17}{2}]$
totalnÍ diferenciál, derivace ve směru:

1a. $f'(6) = \frac{4}{3},\ f''(6) = \frac{25}{27}$
1b. $f'(0) = f''(0) = 0$
1c. $f'(0) = 0,\ f''(0) = f'''(0) = -\frac{2}{3}$

2a. $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = -\frac{1}{5},\ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = -\frac{3}{5}$
2c. $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-6) = 6,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,-6) = -\frac{1}{2}$

3a. $f'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$, $f''(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{23}{4}(?)$
3b. $f'(1) = 1$, $f''(1) = 2$
3c. $T(x,y) = 0 \cdot (x-2) - 1 \cdot (y-1) = 1 - y$

4a. ostré lok. min. v b. $(0,0)$, v b. $(\pm\sqrt[6]{\frac{1}{4}}, 0)$ není lok. extrém
4b. ostré lok. min. v b. $(0,0)$; neostré lok. max. na mn. $\{(x,y) \in R^2; |x| + |y| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$
4d. ostré lok. min. v b. $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$, ostré lok. max. v b. $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$, v b. $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ není extrém

Dú 1. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) = -1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) = 0$
Dú 2. vnitřek: ostré lok. max. v b. $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, ostré lok. min. v b. $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, v počátku není extrém; hranice: lok. min. v bodech $\{(x,y) \in R^2; xy > 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$, lok. maximum v b. $\{(x,y) \in R^2; xy < 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$, sedlový bod v bodech $\{(x,y) \in R^2; xy = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$