

3. Cvičení z MA II. (10. 3. 2014)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co je metoda substituce pro hledání primitivní funkce (2 pravidla)? Jak funguje metoda per partes? Rozklad na parciální zlomky.

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Substituce:

- (a) $\int \sqrt[3]{1-3x} \, dx$ (b) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx$
(c) $\int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}} \, dx$ (d) $\int \frac{\log^2 x}{x} \, dx$
(e) $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$ (f) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} \, dx$
(g) $\int x e^{-x^2} \, dx$ (h) $\int \operatorname{tg} x \, dx$
(i) $\int \operatorname{cotg} x \, dx$ (j) $\int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}} \, dx$
(k) $\int \frac{(1-x)^3}{x \sqrt[3]{x}} \, dx$

2. Per partes:

- (a) $\int (x^2 - x) \exp(x) \, dx$ (b) $\int x \sin x \, dx$
(c) $\int e^x (\sin x + \cos x) \, dx$ (d) $\int \sqrt{x} \log^2 x \, dx$
(e) $\int \sin^7 x \cos x \, dx$ (f) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$
(g) $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$

3. Rozklad na parciální zlomky - určete primitivní funkce

- (a) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x+3} \, dx$ (b) $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+3x+5} \, dx$
(c) $f(x) = \frac{1}{(3x+1)(x-1)} \, dx$ (d) $f(x) = \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} \, dx$
(e) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} \, dx$ (f) $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^4+2x^2+1)} \, dx$
(g) $f(x) = \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3} \, dx$ (h) $f(x) = \frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)} \, dx$

4. Najděte primitivní funkci na maximálním intervalu existence

$$\int \frac{1}{x+(\sqrt{x^2+x+1})} \, dx \quad (\text{Nápověda: zkuste substituci } \sqrt{x^2+x+1} = x+t)$$

Tipy pro substituce:

- 'mocnina' ... $t = ax^k + b$ ($dt = akx^{(k-1)}dx$)
- goniometrické ... $R = \frac{P}{Q}$, kde P, Q polynomy
 - $t = \sin x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos)$, tj. 'lichá wrt $\cos x$ '
 - $t = \cos x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos)$, tj. 'lichá wrt $\sin x$ '
 - $t = \operatorname{tg} x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos)$, tj. 'sudá wrt $\sin x, \cos x$ '
 - $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, univerzální, ale nepříjemná
- odmocnina ...
 - $t = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, pro $R(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}), q \in \mathbb{N}, ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$
 - $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, pro ${}^q\sqrt{S^{p_1}}, \dots, {}^q\sqrt{S^{p_n}}; S = (\frac{ax+b}{cx+d}); s = NSN(q_1, \dots, q_n)$
- eulerova ... $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t$ nebo $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$,
pokud $ax^2 + bx + c$ nemá \mathbb{R} kořeny a $a > 0, c > 0$

Domácí úkol na 17.3.2014:

- (1) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$
- (2) $\int \log |1 + x| dx$
- (3) $\int \arcsin \sin \frac{4x}{x^2+1} dx$

Zopakovat/naučit se/pochopit metodu per partes, obě substituční metody a výpočet primitivní funkce pro racionální lomené funkce.

Řešení: (až na konstantu c)

- 1a.** $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$, na R
1b. $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, na R
1c. $\frac{1}{5} \cdot \sqrt{2+5x^2}$, na R
1d. $\frac{1}{3} \log^3 x$, na $(0, +\infty)$
1e. $\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})$, na $(-1, 1)$
1f. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2}$, na $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
1g. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, na R
1h. $-\log |\cos x|$, na každém $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$
1i. $\log |\sin x|$, na každém $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in Z$
1j. $\frac{1}{3} \cdot \arcsin(x - \frac{1}{3})$, na $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$
1k. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$
- 2a.** $(x^2 - 3x + 3) \exp x$, na R
2b. $\sin x - x \cos x$, na R
2c. $e^x \sin x$, na R
2d. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}(\log^2 x - \frac{4}{3}\log x + \frac{8}{9})$, na $(0, +\infty)$
2e. $\frac{1}{8}\sin^8 x$, na R
2f. $\frac{1}{2}(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x)$, na R
2g. $I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n$, pro $n \in N$ na R
- 3a.** $\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln |x+3|$, na $(-\infty, -3)$ a na $(-3, \infty)$
3b. $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 3x + 5) - \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{11}}(2x+3)$, na R
3c. $F(x) = \frac{1}{4} \log |\frac{x-1}{3x+1}|$, na $(-\infty, -\frac{1}{3})$ a na $(-\frac{1}{3}, 1)$ a na $(1, \infty)$
3d. $\log |x-2| + \log |x+5|$ na $(-\infty, -5)$ a na $(-5, 2)$ a na $(2, \infty)$
3e. $\frac{1}{2}(x+1)^2 + \log |x-1| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \operatorname{arctg} x$ na $(-\infty, 1)$ a na $(1, \infty)$
3f. $F(x) = -\frac{1}{2} \log |x+1| + \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2+1}$, na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, \infty)$
3g.
3h. $F(x) = -\frac{1}{50} \log(x^2 + 2x + 2) + \frac{1}{10} \frac{x+2}{x^2+2x+2} + \frac{1}{100} \log |x-1| + \frac{3}{100} \log |x+3| + \frac{7}{50} \operatorname{arctg} (x+1)$, na $(-\infty, -3)$, na $(-3, 1)$ a na $(1, \infty)$
- Dů.**
(1) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \sin^2 x - 1) = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \cos^2 x - 1)$, na R
(2) $x \log |1+x| - x + \log |1+x|$, na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, \infty)$
(3) $2 \log(x^2 + 1)$ na zákl. intervalu $(\frac{-4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}, \frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi})$,
 $-2 \log |x^2 + 1| - \pi x$ na zákl. intervalu $(\frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}, \frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi})$; nutno "poslepopat"