

## Cvičné příklady k zápočtu z MA II.

1. Najděte délku oblouku křivky dané parametrickými rovnicemi

$$x = a(t - \sin t) , \quad y = a(1 - \cos t) , \quad \text{kde } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

2. Najděte délku oblouku křivky dané rovnicí

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\log y , \quad \text{kde } 1 \leq y \leq e.$$

3. Vypočtěte

$$(R) \int_0^{+\infty} \frac{x \log x}{(1+x^2)^2} dx.$$

4. Vypočtěte

$$(R) \int_0^{+\infty} \exp(-ax) \cos bx \, dx , \quad a, b > 0.$$

5. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$(N) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}} dx .$$

6. V závislosti na parametru  $p \in R$  vyšetřete konvergenci integrálu

$$(N) \int_0^{+\infty} x^{p-1} \exp(-x) \, dx .$$

7. Zjistěte, zda lze následující funkci  $f$  dodefinovat tak, aby v zadaných bodech byly všechny parc. derivace spojité:

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} , \quad \text{na } R .$$

8. Ukažte, že existují funkce  $y = y(x)$  a  $z = z(x)$  třídy  $C^1$ , kde  $y(1) = e$  a  $z(1) = 1$ , které na jistém okolí bodu 1 splňují následující vztahy:

$$e^z - xyz = 0$$

$$\ln xy - \frac{x}{z} = 0$$

Vypočtěte  $y'(1)$  a  $z'(1)$ ,  $y''(1)$  a  $z''(1)$ .

9. Je dána rovnice

$$e^z + x^2 y + z + 5 = 0$$

Ukažte, že existuje funkce  $z = z(x, y)$ , která je dána implicitně touto rovnicí a podmínkou  $z(1, -6) = 0$ .

Určete  $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -6)$  a  $\frac{\partial z}{\partial y}(1, -6)$ .

10. Buď dána funkce

$$f(x, y) = \arccos \frac{x}{x+y}$$

- a) Najděte definiční obor  $D$  funkce  $f$  a načrtněte jej.
- b) Určete gradient funkce  $\nabla f(x, y)$  v bodě  $[1, 1]$ .
- c) Je funkce  $f$  v tomto bodě diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
- d) Aproximujte  $f$  pomocí diferenciálu v bodě  $[1, 04; 0, 99]$ .

11. Buď dána funkce

$$f : (x, y) = \sqrt{\frac{1}{|1 - x^2 - y^2|}}$$

- a) Najděte definiční obor  $D$  funkce  $f$  a načrtněte jej. Pokud to lze, najděte fci  $F$ , která je spojitým rozšířením fce  $f$  na  $R^2$ .
- b) Vypočítejte gradient  $\nabla f(x, y)$  v bodě  $[1, 1]$ . Zjistěte, v jakých bodech má fce  $f$  totální diferenciál. Pokud má fce  $f$  tot. diferenciál v b.  $[1, 1]$ , spočtěte ho.
- c) Aproximujte hodnotu funkce  $f$  v bodě  $[1, 02; 0, 99]$  pomocí totálního diferenciálu  $D_{f(1,1)}$ .
- d) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[0, 0, ?]$ .

12. Buď dána funkce

$$f : (x, y) = \log(\sqrt{y+1} - x)$$

- a) Najděte definiční obor  $D$  funkce  $f$  a načrtněte jej.
- b) Vypočítejte gradient  $\nabla f(x, y)$  v bodě  $[0, 0]$ .  
Pokud má  $f$  v tomto bodě totální diferenciál, určete ho.
- c) Určete rovnici tečné roviny v bodě  $[0, 0]$ .
- d) Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace  $f(-0, 04; 0, 02)$ .

13. Určete globální extrémy zadané funkce  $f$  na množině  $M$ :

$$f(x, y) = xy + 2x + 3y$$

$$M = \{[x, y] \in R^2; 4x^2 + 9y^2 < 36 \text{ \& } y \leq -\frac{x}{2}\}$$

14. Určete globální extrémy zadané funkce  $f$  na množině  $M$ :

$$f(x, y) = (x + y) \cdot e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ \& } |x| \leq y + 1\}$$

15. Určete globální extrémy zadané funkce  $f$  na množině  $M$ :

$$f(x, y, z) = xyz$$

$$M = \{[x, y, z] \in R^3; \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \& \ x + y + z = 0\}$$