13. Cvičení z MA II. (17. 5. 2013)

Lokální a globální extrémy funkce, vázané extrémy
Co to je Hessova matice funkce f v bodě a? Co znamená, že je matice pozitivně / negativně (semi)definitní / indefinitní? Kdy to nastává?

Sylvestrovo kritérium: Kvadratická forma $q : R^n \to R$ je
(i) pozitivně definitní, jestliže všechny hlavní subdeterminanty matice jsou kladné;
(ii) negativně definitní, jestliže hlavní subdeterminant střídají znaménka (počínaje záporným);
(iii) indefinitní, jestliže všechny hlavní subdeterminanty matice jsou nenulové a neplatí (i) ani (ii).

1. Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x, y) = x(3 - x^2) - y^2$

(b) $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2}$

(c) $f(x, y, z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$

(d) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$

(e) $f(x, y) = 27xy^2 + 14x^3 - 69x - 54y$

2. Vyšetřete extrémy následujících funkcí na zadané množině:

(a) $f(x, y) = xy^2$ na $M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + y^2 = 1\}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na $M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + 2x + y^2 = 0\}$

(c) $f(x, y) = x + 2y + \frac{3}{4}x^2 + xy + 2y^2$ na $M = \{x, y]; y^2 - 2 \le x \le -y^2 + 2\}$

3. Zjistěte lokální extrémy funkcí na zadaných množinách – využijte Lagrangeových multiplikátorů.

(a) $f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$ za podmínky $x^2 + 2x + y^2 = 0$

(b) $f(x, y) = y$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$

(c) $f(x, y) = y^2 - 2x + x^2$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x = y^2\}$

(d) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$ na množině
$M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \le 5\}$

(e) $f(x, y) = x^2 - y^2$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid y + e^{-x^2} - 1 = 0\}$

Řešení:

1a. ostré lok. max. v b. $(1,0)$, v b. $(-1,0)$ není lok. extrém
1b. ostré lok. min. v b. $(1,1)$, v b. $(0,0)$ není lok. extrém
1c. ostré lok. max. v b. $(\frac{1}{2},1,\frac{1}{4})$, v b. $(0,1,0)$ není lok. extrém
1d. ostré lok. min. v b. $(\frac{1}{2},1,1)$, ostré lok. max. v b. $-(\frac{1}{2},-1,-1)$
1e. ostré lok. min. v b. $(1,1)$, ostré lok. max. v b. $(-1,-1)$, v b. $(\pm\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{\sqrt{14}}{3})$ není lok. extrém

2a. ostré lok. max. v b. $(-1,0),(\sqrt{\frac{1}{3}},\pm\sqrt{\frac{2}{3}})$, ostré lok. min. v b. $(1,0),(-\sqrt{\frac{1}{3}},\pm\sqrt{\frac{2}{3}})$
2b. lokální=globální minimum v b. $(-\frac{\sqrt{3}+2}{2},\frac{1}{2})$, lokální=globální maximum v b. $(\frac{\sqrt{3}-2}{2},-\frac{1}{2})$
2c. vnitřek: podezřelý bod $(-\frac{2}{5},-\frac{2}{5})$, hranice: podezřelé body $(0,\pm\sqrt{2}),(-2,0),(-1,-1),(1,1),(\frac{2}{3},\pm\frac{2}{\sqrt{3}})$; glob. minimum v b. $(-\frac{2}{5},-\frac{2}{5})$, glob. maximum v b. $(0,\sqrt{2})$

3a. lokální=globální minimum v b. $(-\frac{\sqrt{3}+2}{2},\frac{1}{2})$, lokální=globální maximum v b. $(\frac{\sqrt{3}-2}{2},-\frac{1}{2})$
3b. $(0,0)$ není extrém; $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ ostrá lok. maximum vzhledem k M
3c. $(0,0)$ ostrá lok. maximum vzhl. k M; $(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ ostrá lok. minima vzhl. k M
3d. $(3,2)$ ostré lok. minimum; $(2-\frac{3}{\sqrt{5}},-\frac{6}{\sqrt{5}})$ ostré lok. maximum; podezřelý bod na hranici $(2+\frac{3}{\sqrt{5}},+\frac{6}{\sqrt{5}})$ není extrémem
3e. $(0,0)$ ostré lok. minimum