10. Cvičení z MA II. (26. 4. 2013)

Co to je **(totální) diferenciál** funkce $f : G \to R$ ($G \subset R^n$ otevřená) v bodě $a \in G$ (značíme $Df(a)$)?
Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi?

1. Ověřte podle definice, že lineární funkce $L(h_1, h_2) = 2(h_1+h_2)$ je diferenciálem funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě $(1,1)$.

2. Dodefinujte funkci $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ na R^2 tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.

3. Vyšetřete, zda lze funkci $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}\log(1+xy)$ dodefinovat v nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla diferenciál.

Co to je směrová derivace? Jak souvisí totální diferenciál s derivacemi ve směru?

4. Vypočtěte derivace následujících funkcí f v zadaných směrech h v zadaných bodech a.
(Jak byste postupovali, pokud byste chtěli využít pouze definice směrové derivace?)

(b) $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$ ve směru $h = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ v bodě $a = (1,1)$

(c) $f(x,y) = e^{x-y^2}$ ve směrech $(1,0)$, $(-1,0)$, $(1,1)$ v bodě $(0,0)$

(d) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ ve směru $(2,1,1)$ v bodě $(1,1,0)$

(e) Určete směrové derivace funkce $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$ v bodě $(0,0,0)$. Rozhodněte, zda v tomto bodě existuje diferenciál.

5. Vypočtěte totální diferenciál následujících funkcí f:

(b) $f(x,y) = e^{xy}$ (c) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

6. Ukažte, že pro malá x a y platí:

(b) $(1+x)^m(1+y)^n \approx 1 + mx + ny$

(c) $\ln(1+x)\ln(1+y) \approx xy$

Domácí úkol na 3. 5. 2013

1. Buď dána funkce

$$f(x,y) = \log(x + y^2)$$

(a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
(b) Vypočítejte gradient funkce $\nabla f(x,y)$ v bodě $[0,1]$.
(c) Je funkce f v bodě $[1,1]$ diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
(d) Aproximujte hodnotu funkce f v bodě $[0,04; 0,99]$ pomocí totálního diferenciálu $D_{f(0,1)}$.
(e) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $[1,1,0]$.

2. Vypočtěte derivace následující funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ ve směru $h = (-1,1,1)$ v bodě $a = (1,2,-1)$.

3. Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y) = \frac{x}{y}$.

Konvence (v technických textech):
Nechť $h = (h_1, \dots h_n) \in R^n$ a x_i jsou projekce na i-tou souřadnici (tj. $x_i(h) = h_i$). Projekce jsou lineární (proč?), proto diferenciál dx_i je roven x_i (zde píšeme dx_i místo Dx_i v j. bodě). Diferenciál je též projekcí na i-tou souřadnici: $dx_i(h) = x_i(h) = h_i$. Tedy

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1(h) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n(h)$$

Píšeme tedy:

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$