9. Cvičení z MA II. 19. 4. 2013

1. Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací:

$f(x, y) = xy$ pro $|x| \geq |y|$ a $f(x, y) = 0$ pro $|x| < |y|$

Poznámka. K následujícím příkladům se vrátíme v některém z dalších cvičení.

2. Derivujte podle všech proměnných (derivace složených funkcí – řetízkové pravidlo):

(a) funkci $t \to u$, kde $u = e^{x-2y},\ x = \sin t,\ y = t^3$

(b) funkci $t \to z$, kde $z = \arcsin(x - y),\ x = 3t,\ y = 4t^3$

(c) funkci $(r, \varphi) \to z$, kde $z = x^2 y - xy^2,\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

(d) Nechť funkce $(u, v, w) \to f(u, v, w)$ má spoj. parc. der. 2. řádu na R^3. Spočítejte parc. der. 2. řádu funkce $p(x, y, z) = f(x, xy, xyz)$.

Co to je **(totální) diferenciál** funkce $f : G \to R$ ($G \subset R^n$ otevřená) v bodě $a \in G$ (značíme $Df(a)$)?
Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi?

3. Ověřte podle definice, že lineární funkce $L(h_1, h_2) = 2(h_1 + h_2)$ je diferenciálem funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $(1, 1)$.

4. Dodefinujte funkci $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ na R^2 tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.

5. Vyšetřete, zda lze funkci $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}\log(1 + xy)$ dodefinovat v nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla diferenciál.

Domácí úkol na 26. 4. 2013:

(1) Určete definiční obor následující funkce, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují
$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pro $[x, y] \neq 0$, $f(0, 0) = 0$

(2) Určete definiční obor následující funkce a vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu všude, kde existují. Nalezněte rovnici tečné nadroviny v zadaném bodě.
$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$, v bodě $[1, 1, f(1, 1)]$

(3) Spočítejte hodnoty parc. der. 1. a 2. řádu funkce
$F(x, y) = g(xy, \frac{x}{y})$ v bodě $A = (3, 2)$.