6. Cvičení z MA I. (9. 11. 2010)

1. Spočítejte následující limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\lfloor \sqrt[3]{n}\rfloor^3}{n-\lfloor\sqrt{n+9}\rfloor}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{i}{n} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ (i je imaginární číslo)

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$ (d) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{\sqrt{n^7}+\sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7}-\sqrt[3]{n^7}}\right)$

(e) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ (f) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^3+\ldots+n^3}{n^4}$

2. Dokažte, že následující rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu a spočítejte ji:

$$a_1 = \sqrt{c} \quad (c > 0,\ c \in R), \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \ \text{ pro každé } n \in N$$

3. Zjistěte, pro která reálná čísla x je následující posloupnost monotonní:

$$\left\{ \left(\frac{x^3}{3x-2}\right)^n \right\}$$

4. Určete limity v závislosti na $k, l \in N$:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k+(-n)^l}{(n-1)^k-n^l}$

5. Spočítejte:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Řešení:
1a. 2 1b. 0 1c. 0 1d. $\frac{2}{3}$ 1e. neex. 1f. $\frac{1}{4}$

3. konst. pro $x \in \{-2, 0, 1\}$, rost. pro $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{2}{3}; 1) \cup (1; +\infty)$, kles. pro pro $x \in (-2; 0)$

4a. 1 pro $k > l$, -1 pro $k < l$, 0 pro $k = l$
4b. 1 pro $k > l$, $(-1)^{1+l}$ pro $k < l$, $-\infty$ pro $k = l$ sudé, -1 pro $k = l$ liché

5. $\frac{1}{2}$