1. Cvičení z MA I. (5. 10. 2010)

M. Lopatková

http://ufal.mff.cuni.cz/~lopatkova

Co je relace, zobrazení, funkce? Vlastnosti relace. Absolutní hodnota udává "vzdálenost" (vlastnosti vzdálenosti). Jak jinak lze měřit vzdálenost?

1. Řešte nerovnice v R:

(a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$ (b) $\frac{x+3}{x-1} \geq \frac{x+1}{x-5}$ (c) $|5x-2| < x$

(d) $\frac{|x+1|}{x-1} \geq x$ (e) $||x-2|+1| \leq 5$ (f) $|x^2-4x+3| \leq |x^2-4|$

(g) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0$ (h) $\cos^2 x > sin^2 x$

2. Ukažte, že pro všechna $a, b \in R$ platí:

(a) $|a+b| \leq |a| + |b|$

(b) $||a| - |b|| \leq |a-b|$

(c) $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$

3. AG nerovnost: Pro kladná reálná $x_1, \ldots x_n$ platí:

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$$

Dokažte pro $n = 2$.

4. Nakreslete grafy funkcí:

(a) $|||x| - 1| - 1| - 1|$, $||x-1|^2 - 1|$, $||x-1| - 1|^2$

(b) $\cos x$, $\cos(x+\pi)$, $\cos(2x+\pi)$, $\sin|x|$, $|\sin x|$

(c) $\sin x^2$, $\sin \frac{1}{x}$, $\ln \sin x$, $\ln \ln \sin x$

5. Ukažte, že každý celočíselný obnos větší nebo roven 8 lze vyplatit pětikorunami a tříkorunami.

6. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

(a) $\forall x \in N \quad \exists y \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(b) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(c) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in R$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

7. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(a) $A \Rightarrow B, \ \neg B \Rightarrow \neg A, \ \neg(A \& \neg B), \ \neg A \vee B$

(b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C, \ A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

8. Který z následujících výroků je silnější?

(a) $\forall x \in R \quad \exists K > 0 \ , \ K \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

(b) $\exists K > 0 \ , \ K \in R \quad \forall x \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

9. Mějme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A, B \subset X$. Jaké musí mít f, A, B vlastnosti, aby platily následující vztahy?

(a) $\forall A \quad f^{-1}(f(A)) = A$ (b) $\forall A \quad f(f^{-1}(A)) = A$

(c) $\forall A, B \quad f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$ (d) $\forall A, B \quad f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$

(e) $\forall A, B \quad f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ (f) $\forall A, B \quad f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

Domácí úkol: Dokažte, že pro $\forall x \in R, \ \forall y \in R, \ \forall n \in N$ platí (z axiomů pro reálná čísla)

(a) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ (b) $-x = (-1) \cdot x$

(c) $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ (d) $(0 \leq x < y) \Rightarrow x^n < y^n$

Řešení:
1a. $(4; 6\rangle$ 1b. $\langle -\infty; -7\rangle \cup (1, 5)$ 1c. $(1/3; 1/2)$ 1d. $\langle -\infty; 1 - \sqrt{2}\rangle \cup (1; 1 + \sqrt{2}\rangle$ 1e. $\langle -2; 6\rangle$ 1f. $\langle 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{7}{4}\rangle \cup \langle 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}; +\infty)$ 1g. $\langle 1; 2\rangle$ 1h. $\bigcup_{k \in Z} \langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\rangle$