8. Cvičení z MA I. (30. 11. 2010)

Co jsou to (číselné) řady a jak se definuje jejich součet? Kdy řada konverguje? Nutná a postačující podmínka konvergence. Alternující řady a Leibnizovo kritérium.

1. Rozhodněte, zda následující řady konvergují.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1+nx}{\sqrt{n^2+n^6x^2}}$ pro parametr $x \in R$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n-\ln n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$

2. Rozhodněte, zda následující řada konverguje.

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\cdots$$

3. Lineární kombinace pro řady – dokažte následující:

(a) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\alpha \in R$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ konverguje též.

Platí: $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Jestliže řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, pak konverguje též řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$.

Platí: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

4. Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně, případně divergují:[1]

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}}$ $[D]$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n+\ln n}$ $[D]$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$ $[KA]$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ $[KA$ pro všechna $x]$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n}$ $[D]$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$ $[KA]$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ $[D]$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$ $[KA]$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n-\ln n}$ $[KN]$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ $[D]$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}$ $[KA$ pro $x \in (0, 1/e), D$ pro $x \geq 1/e]$

---

[1] D ... diverguje, KA ... konverguje absolutně, KN ... konverguje neabsolutně

5. Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně, případně divergují:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n^2\pi(\sqrt{n+11} - \sqrt{n+2})$ $\quad [KN]$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ $\quad [KA \text{ pro } \mid x \mid < 1, D \text{ pro} \mid x \mid > 1, KN \text{ pro } \mid x \mid = 1]$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^4+3}$ $\quad [KA]$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$ $\quad [KA$ pro $\alpha > 1/2$, jinak $D]$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$ $\quad [KA \text{ pro } \mid x \mid < 1, D \text{ pro } \mid x \mid \geq 1]$