10. Cvičení z MA I. (14. 12. 2010)

Co je to funkce? Jak se definuje limita funkce v bodě? Kdy je funkce spojitá?

1. Dokažte, že funkce f je na intervalu I rostoucí, právě když platí

$$\forall x, y \in I, x \neq y : \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$$

2. Je-li f neklesající na $(-\infty, a\rangle$ a nerostoucí na $\langle a, +\infty)$ pro nějaké $a \in R$, pak f nabývá maxima.

3. Nechť f nabývá minima v $a \in R$. Musí existovat $\epsilon > 0$ takové, že f je nerostoucí na $(a-\epsilon, a\rangle$ a neklesající na $\langle a, a+\epsilon)$?

4. Které z následujících operací provedených na neklesající funkce f, g dává opět neklesající funkci?

(a) $f+g$ (b) $f-g$ (c) $\max\{f,g\}$ (d) $\min\{f,g\}$ (e) $f \circ g$

5. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, pokud $a = 0, 1, +\infty, -\infty$
[1 pro $a=0$; 2/3 pro $a=1$; 1/2 pro $a=+-\infty$]

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ $[\frac{1}{2}]$ (c) $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ $[(\frac{3}{2})^{10}]$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$ $[neex.]$ (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ $[\frac{3}{2}]$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n \in N)$ $[\frac{1}{n}]$ (g) $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m, n \in N)$ $[\frac{m}{n}]$

(h) $\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$ $[\frac{1}{2}n(n+1)]$ (i) $\lim_{x\to 1}(\lfloor x \rfloor - x)$ [neex.]

(j) $\lim_{x\to 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ [1] (k) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ $[\frac{1}{2}mn(n-m)]$

(l) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m, n \in N)$ $[\frac{n}{m}]$

(m) $\lim_{x\to +\infty} \left\{ \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right\}$ $(a, b \in R)$ $[\frac{1}{2}(a+b)]$

(n) $\lim_{x\to +\infty} \left\{ \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdot \ldots \cdot (x+a_k)} - x \right\}$ $(a_i \in R)$ $[\frac{1}{k}\sum a_i]$

(o) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$ $(n, m \in N, \quad a, b \in R)$ $[\frac{na-mb}{mn}]$