

### 3. Cvičení z MA I. (19. 10. 2010)

Co je to supremum, infimum, maximum, minimum? Příklad množiny, která má supremum, ale ne maximum; příklad množiny bez suprema.

1. Najděte suprema a infima následujících množin v  $R$  (pokud existují); existují pro ně maxima a minima?

(a)  $A_1 = \{-\frac{1}{n}; n \in N\}$  (b)  $A_2 = \{\frac{n+(-1)^n}{n}; n \in N\}$

(c)  $A_3 = \{n^{(-1)^n}; n \in N\}$  (d)  $A_4 = \{q < \sqrt{3}; q \in Q\}$

(e)  $A_5 = \{\sin x \cos x; x \in R\}$

Co je to posloupnost, monotónní posloupnost? Jaká je definice limity pro posloupnosti; nevlastní limita?

2. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti monotónní.

(a)  $\{2n + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$  (b)  $\{\frac{1}{1+n^2}\}_{n=1}^{\infty}$

(c)  $\{\frac{n+1}{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$  (d)  $\{\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-2}}\}_{n=1}^{\infty}$

3. Spočítejte přímo podle definice limitu posloupnosti:

(a)  $\{\frac{1}{1+n^2}\}_{n=1}^{\infty}$  (b)  $\{\frac{n+1}{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$

4. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(-1)^n$  (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n!}$  (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5n}{-n^2+4n}$  (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5^n+10^n}{-2^{n+1}+5^{n+1}+10^{n+1}}$

(g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2(n\pi/4)$  (h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n^2$

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$  (j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$

(k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$  (l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$

(m)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+4n+n \sin n}{n \cos 3n+(2n+\sin n)^2}$  (n)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt[2]{n^3+1}}$

**Řešení:**

1a.  $\sup A_1 = 0, \inf A_1 = -1 = \min, \max$  neex.

1b.  $\sup A_2 = \frac{3}{2} = \max, \inf A_2 = 0 = \min$

1c.  $\sup A_3$  neex.,  $\inf A_3 = 0, \min$  neex.

1d.  $\sup A_4 = \sqrt{3}, \inf, \max, \min$  neex.

1e.  $\sup A_5 = \frac{1}{2} = \max, \inf A_5 = -\frac{1}{2} = \min$

2a. nekles.    2b. kles.    2c. rost.    2d. kles. (tady byla chyba)

3a. 0    3b. 1

4a. neex.    4b.  $\cos 1$     4c. 1    4d. 0    4e.  $-3$     4f.  $\frac{1}{10}$     4g. neex.    4h. 0    4i. 0  
4j. 0    4k.  $\frac{1}{2}$     4l. 1    4m.  $\frac{1}{2}$     4n. 0