3. Cvičení z MA II. (9.3.10)

Co je metoda substituce pro hledání primitivní funkce (2 pravidla)?
Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Substituce:

(a) $\int \sqrt[3]{1-3x}\; dx$ (b) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\; dx$

(c) $\int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}}\; dx$ (d) $\int \frac{\log^2 x}{x}\; dx$

(e) $\int \sqrt{1-x^2}\; dx$ (f) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\; dx$

(g) $\int xe^{-x^2}\; dx$ (h) $\int \mathrm{tg} x\; dx$

(i) $\int \mathrm{cotg}\; dx$ (j) $\int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}}\; dx$

(k) $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\; dx$ (l) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\; dx$

2. Rozklad na parciální zlomky - určete primitivní funkce

(a) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x+3}\; dx$ (b) $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+3x+5}\; dx$

(c) $f(x) = \frac{1}{(3x+1)(x-1)}\; dx$ (d) $f(x) = \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\; dx$

(e) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\; dx$ (f) $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^4+2x^2+1)}\; dx$

(g) $f(x) = \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3}\; dx$ (h) $f(x) = \frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)}\; dx$

3. Najděte primitivní funkci na maximálním intervalu existence

(a) $\int \arcsin \sin \frac{4x}{x^2+1}\; dx$

(b) $\int \frac{1}{x+(\sqrt{x^2+x+1})}\; dx$ (Nápověda: zkuste substituci $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$)

tipy pro substituce:

- 'mocnina' ... $t = ax^k + b$ $(dt = akx^{(k-1)}dx)$
- goniometrické ...$R = \frac{P}{Q}$, kde P, Q polynomy
  - $t = \sin x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos)$, tj. 'lichá wrt $\cos x$'
  - $t = \cos x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos)$, tj. 'lichá wrt $\sin x$'
  - $t = \operatorname{tg} x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos)$, tj. 'sudá wrt $\sin x, \cos x$'
  - $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, univerzální, ale nepříjemná
- odmocnina ...
  - $t = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, pro $R(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}), q \in N, ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in R$
  - $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, pro $\sqrt[q_1]{S^{p_1}}, \ldots \sqrt[q_n]{S^{p_n}}$; $S = (\frac{ax+b}{cx+d})$; $s = NSN(q_1, \ldots q_n)$
- eulerova ... $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$ nebo $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$,
  pokud $ax^2 + bx + c$ nemá R kořeny a $a > 0, c > 0$

Řešení: (až na c)

1a. $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$, na R **1b.** $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, na R **1c.** $\frac{1}{5} \cdot \sqrt{2 + 5x^2}$, na R **1d.** $\frac{1}{3} \log^3 x$, na $(0, +\infty)$ **1e.** $\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2})$, na $(-1, 1)$ **1f.** $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2}$, na $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ **1g.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, na R **1h.** $-\log|\cos x|$, na každém $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in Z$ **1i.** $\log|\sin x|$, na každém $(k\pi, (k+1)\pi), k \in Z$ **1j.** $\frac{1}{3} \cdot \arcsin(x - \frac{1}{3})$, na $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ **1k.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ **1l.** $\frac{1}{2}$ arctg$(2\sin^2 x - 1) = -\frac{1}{2}$ arctg$(2\cos^2 x - 1)$, na R **1m.** $3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\log\sqrt[6]{x} + 6\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\frac{1}{\sqrt{x}}$ na R

2a. $\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x + 3|$, na $(-\infty, -3)$ a na $(-3, \infty)$ **2b.** $\frac{3}{2}\ln(x^2 + 3x + 5) - \frac{1}{\sqrt{11}}$ arctg $\frac{1}{\sqrt{11}}(2x + 3)$, na R **2c.** $F(x) = \frac{1}{4}\log|\frac{x-1}{3x+1}|$, na $(-\infty, -\frac{1}{3})$ a na $(-\frac{1}{3}, 1)$ a na $(1, \infty)$ **2d.** $\log|x - 2| + \log|x + 5|$ na $(-\infty, -5)$ a na $(-5, 2)$ a na $(2, \infty)$ **2e.** $\frac{1}{2}(x + 1)^2 + \log|x - 1| - \frac{1}{2}\log(x^2 + 1) -$ arctg x na $(-\infty, 1)$ a na $(1, \infty)$ **2f.** $F(x) = -\frac{1}{2}\log|x + 1| + \frac{1}{4}\log(x^2 + 1) + \frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}$, na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, \infty)$ **2g.** **2h.** $F(x) = -\frac{1}{50}\log(x^2+2x+2) + \frac{1}{10}\frac{x+2}{x^2+2x+2} + \frac{1}{100}\log|x-1| + \frac{3}{100}\log|x+3| + \frac{7}{50}$arctg $(x+1)$, na $(-\infty, -3)$, na $(-3, 1)$ a na $(1, \infty)$