11. cvičení z MA II. (4.5.2010)

Ještě derivace složených funkcí.

1. rozcvička: Derivujte podle všech proměnných.

(a) funkci $t \to u$, kde $u = e^{x-2y},\ x = \sin t,\ y = t^3$

(b) funkci $t \to z$, kde $z = \arcsin(x - y),\ x = 3t,\ y = 4t^3$

(c) funkci $(r, \varphi) \to z$, kde $z = x^2y - xy^2,\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

(d) Nechť funkce $(u, v, w) \to f(u, v, w)$ má spoj. parc. der. 2. řádu na R^3. Spočítejte parc. der. 2. řádu funkce $p(x, y, z) = f(x, xy, xyz)$.

(e) Spočítejte hodnoty parc. der. 1. a 2. řádu fce $F(x, y) = g(xy, \frac{x}{y})$ v bodě $A = (3, 2)$.

Věta o implicitních funkcích.

2. Je zadaná funkce $F(x, y)$ a dvě čísla x_0, y_0 taková, že $F(x_0, y_0) = 0$. Dokažte, že v nějakém okolí U bodu (x_0, y_0) existuje funkce $f = f(x)$ splňující podmínky $f(x_0) = y_0$ a $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Určete $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.

(a) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4,\ (x_0, y_0) = (6, 2)$

(b) $F(x, y) = x\sin y - \cos y + \cos 2y,\ (x_0, y_0) = (1, 0)$

(c) $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1,\ (x_0, y_0) = (0, 1)$

3. Funkce $f = f(x, y)$ je dána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ a podmínkou $f(x_0, y_0) = z_0$. Určete derivace f podle všech proměnných (a vypočítejte pro zadané body).

(a) $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 2z + 3,\ (x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, -2)$

(b) $F(x, y, z) = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1,\ (x_0, y_0, z_0) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$

(c) $F(x, y, z) = e^z + x^2y + z + 5,\ (x_0, y_0, z_0) = (1, -6, 0)$

4. Ukažte, že zadanou množinu M lze na okolí daného bodu a popsat jako graf funkce f. Spočtěte její (parc.) derivace prvního a druhého řádu v příslušném bodu.

(a) $M=\{(x,y)\in R^2;\ (x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0\}$ v okolí b. $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

(b) $M=\{(x,y)\in R^2;\ \log\sqrt{x^2+y^2}=\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\}$ v okolí b. $(1,0)$, kde $f(1)=0$

(c) $M=\{(x,y,z)\in R^3;\ x\sin z+y\cos z-e^z=0\}$ v okolí b. $(2,1,0)$,
kde $f(2,1)=0$. Napište rovnici její tečny v b. $(2,1,0)$.

Řešení:

1a. 1b. 1c.

1d. např. $\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}+yz\frac{\partial f}{\partial w}$; např. $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=x^2y^2\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}$

1e. např. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(3,2)=4\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(6,\frac{3}{2})+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(6,\frac{3}{2})+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(6,\frac{3}{2})$, kde $g=g(u,v)$

2a. $f'(6)=\frac{4}{3},\ f''(6)=\frac{25}{27}$

2b. $f'(0)=f''(0)=0$

2c. $f'(0)=0,\ f''(0)=f'''(0)=-\frac{2}{3}$

3a. $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2)=-\frac{1}{5},\ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2)=-\frac{3}{5}$

3b. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})=-1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})=0$

3c. $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-6)=6,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,-6)=-\frac{1}{2}$

4a. $f'(\frac{\sqrt{3}}{2})=0\ ,\ f''(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{23}{4}(?)$

4b. $f'(1)=1\ ,\ f''(1)=2$

4c. $T(x,y)=0\cdot(x-2)-1\cdot(y-1)=1-y$