6. Cvičení z MA II. (30.3.09)

Určitý integrál. Jak se definuje Riemannův integrál? Kdy je funkce R-integrovatelná? Jak se definuje Newtonův integrál, kdy je funkce N-integrovatelná?

1. Určitý integrál z definice:
(Platí: Pro $a < b < c$ reálná je ${}_{(R)}\int_a^c = {}_{(R)}\int_a^b + {}_{(R)}\int_b^c$, pokud má jedna strana smysl.)

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} 1dx$ (b) $\int_{-2}^{2} \lfloor x \rfloor dx$, kde $\lfloor x \rfloor$ je celá část x

2. Určitý integrál pomocí primitivní funkce:
(Platí: Nechť f spoj. na (a,b) a F je primitivní k f. Potom
${}_{(R)}\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$, pokud je alespoň jedna strana R číslo)

(a) $\int_0^1 x^\alpha dx$, $\alpha \in R$ (b) $\int_0^\infty \sin x dx$

(c) $\int_{-\sqrt{3}}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ (d) $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (e) $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(f) $\int_0^8 \sqrt{1+x} dx$ (g) $\int_0^\pi \frac{\sin 2x}{\sin x}$ (h) $\int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+2} dx$

(i) $\int_0^5 |x^2 - 3x + 2| dx$ (j) $\int_0^a |\cos x| dx$, kde $a = \frac{49}{6}\pi$

3. Per partes a substituce pro urč. integrál (vs. primitivní fce):

(a) $\int_1^e x^2 \ln x dx$ (b) $\int_0^1 x \text{ arctg } x dx$ (c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos x dx$

(d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx$ (e) $\int_0^\pi \frac{1}{1+3\sin^2 x} dx$

(f) $\int_0^{10\pi} (\text{arctg } (\sin^3 x + \sin(\sin x)) - \sin x) \cdot \cos x dx$

(g) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+\cos x)^2} \sin \frac{1}{1+\cos x} \sin x dx$

4. Aplikace určitého integrálu:

– plocha: najděte obsah omezené rovinné oblasti ohraničené křivkami

(a) $y = x^2,\ y = x$ (b) $y = \cos x,\ y = \sin x,\ x = 0$

(c) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ y = \frac{1}{1+4x^2},\ x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

– délka křivky:

(a) $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ pro $x \in \langle 0, 3 \rangle$

(b) $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ pro $x \in \langle 0, \gamma \rangle$, kde $a, \gamma > 0$ parametry

– objem rotačního tělesa: M oblast ohraničená grafem funkce f a osou x na daném intervalu; vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací M kolem osy x

(a) $f(x) = \sqrt{\sin x},\ x \in \langle 0\pi \rangle$

– integrální kritérium konvergence řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 0)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n}$

5. Rozmyslete si, že platí:

(a) $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\log x}{x} dx = 0$ pro $a > 0$

(b) Nechť f je spoj. a platí $f(\frac{\pi}{2} + y) = f(\frac{\pi}{2} - y)$ pro $\forall y \in R$. Potom

$$\int_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}+a} f(x) \cos x dx = 0$$

Řešení: (až na c)

1a. 2π **1b.** -2
2a. pro $\alpha \leq -1$ neex., pro $\alpha > -1 \ldots \frac{1}{\alpha+1}$ **2b.** neex. **2c.** $\frac{7\pi}{12}$ **2d.** $\frac{\pi}{3}$ **2e.** $-\frac{\pi}{3}$
2f. $\frac{52}{3}$ **2g.** 0 **2h.** $\frac{\pi}{12}$ **2i.** $\frac{29}{2}$ **2j.** $\frac{33}{2}$
3a. $\frac{1}{9}(2e^3 + 1)$ **3b.** $\frac{1}{4}(\pi - 2)$ **3c.** 2^{-6} **3d.** $\frac{\pi}{4}$ **3e.** $\frac{\pi}{2}$ **3f.** 0 **3g.** neex.