

12. Cvičení z MA II. (11. 5. 2010)

Co to je lokální / globální extrém funkce $f : G \rightarrow R$ ($G \subset R^n$ otevřená)? Jaké jsou nutné podmínky pro to, aby fce měla v bodě a extrém? Co to jsou stacionární body?

1. Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí:

- (a) $f(x, y) = x^2 + |\arctg y| - x^8$
- (b) $f(x, y) = (|x| + |y|)^2 - (|x| + |y|)^4$
- (c) $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- (d) $f(x, y) = xy \log(x^2 + y^2)$

Co to je Hessova matice funkce f v bodě a ? Co znamená, že je matice pozitivně / negativně (semi)definitní / indefinitní? Kdy to nastává?

Sylvestrovo kritérium: Kvadratická forma $q : R^n \rightarrow R$ je

- (i) pozitivně definitní, jestliže všechny hlavní subdeterminanty matice jsou kladné;
- (ii) negativně definitní, jestliže hlavní subdeterminant střídají znaménka (počínaje záporným);
- (iii) indefinitní, jestliže všechny hlavní subdeterminanty matice jsou nenulové a neplatí (i) ani (ii).

2. Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí:

- (a) $f(x, y) = x(3 - x^2) - y^2$
- (b) $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2}$
- (c) $f(x, y, z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$
- (d) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$
- (e) $f(x, y) = 27xy^2 + 14x^3 - 69x - 54y$

3. Vyšetřete extrémy následujících funkcí na zadané množině:

- (a) $f(x, y) = xy^2$ na $M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + y^2 = 1\}$
- (b) $f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na $M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + 2x + y^2 = 0\}$
- (c) $f(x, y) = x + 2y + \frac{3}{4}x^2 + xy + 2y^2$ na $M = \{x, y; y^2 - 2 \leq x \leq -y^2 + 2\}$
(stačí globální)

4. Zjistěte lokální extrémy funkcí na zadaných množinách – využijte Lagrangeových multiplikátorů.

(a) $f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$ za podmínky $x^2 + 2x + y^2 = 0$

(b) $f(x, y) = y$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$

(c) $f(x, y) = y^2 - 2x + x^2$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$

(d) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$ na množině
 $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 5\}$

(e) $f(x, y) = x^2 - y^2$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + e^{-x^2} - 1 = 0\}$

Řešení:

1a. ostré lok. min. v b. $(0, 0)$, v b. $(\pm \sqrt[6]{\frac{1}{4}}, 0)$ není lok. extrém

1b. ostré lok. min. v b. $(0, 0)$; neostré lok. max. na mn. $\{(x, y) \in R^2; |x| + |y| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

1c. vnitřek: ostré lok. max. v b. $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, ostré lok. min. v b. $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, v počátku není extrém; hranice: lok. min. v bodech $\{(x, y) \in R^2; xy > 0, x^2 + y^2 = 1\}$, lok. maximum v b. $\{(x, y) \in R^2; xy < 0, x^2 + y^2 = 1\}$, sedlový bod v bodech $\{(x, y) \in R^2; xy = 0, x^2 + y^2 = 1\}$

1d. ostré lok. min. v b. $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$, ostré lok. max. v b. $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$, v b. $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ není extrém

2a. ostré lok. max. v b. $(1, 0)$, v b. $(-1, 0)$ není lok. extrém

2b. ostré lok. min. v b. $(1, 1)$, v b. $(0, 0)$ není lok. extrém

2c. ostré lok. max. v b. $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4})$, v b. $(0, 1, 0)$ není lok. extrém

2d. ostré lok. min. v b. $(\frac{1}{2}, 1, 1)$, ostré lok. max. v b. $(-\frac{1}{2}, -1, -1)$

2e. ostré lok. min. v b. $(1, 1)$, ostré lok. max. v b. $(-1, -1)$, v b. $(\pm \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{14}}{3})$ není lok. extrém

3a. ostré lok. max. v b. $(-1, 0)$, $(\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm \sqrt{\frac{2}{3}})$, ostré lok. min. v b. $(1, 0)$, $(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm \sqrt{\frac{2}{3}})$

3b. lokální=globální minimum v b. $(-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{1}{2})$, lokální=globální maximum v b. $(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\frac{1}{2})$

3c. vnitřek: podezřelý bod $(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5})$, hranice: podezřelé body $(0, \pm\sqrt{2})$, $(-2, 0)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$, $(\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}})$; glob. minimum v b. $(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5})$, glob. maximum v b. $(0, \sqrt{2})$

4a. lokální=globální minimum v b. $(-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{1}{2})$, lokální=globální maximum v b. $(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\frac{1}{2})$

4b. $(0, 0)$ není extrém; $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ ostrá lok. maximum vzhledem k M

4c. $(0, 0)$ ostrá lok. maximum vzhl. k M ; $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ ostrá lok. minima vzhl. k M

4d. $(3, 2)$ ostré lok. minimum; $(2 - \frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}})$ ostré lok. maximum; podezřelý bod na hranici $(2 + \frac{3}{\sqrt{5}}, +\frac{6}{\sqrt{5}})$ není extrémem

4e. $(0, 0)$ ostré lok. minimum