1. Cvičení z MA II. (23.1.2010)

Co je Taylorův polynom funkce f v zadaném bodě a (značení $T_n^{f,a}$)?
Jak je tento polynom charakterizován (pro $x \to a$)?

1. Najděte Taylorův polynom řádu 5 v bodě 0 pro funkci tg .

2. Najděte Taylorův polynom řádu N v bodě 0 pro následujících funkce. Konverguje tento polynom k zadané funkci (tj. pro $n \to \infty$)? Pro jaká x?

(a) $f(x) = e^{-x^2}$

(b) $f(x) = xe^{2x}$

(c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$

(d) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$

(e) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$

(f) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

(g) $f(x) = \log 2$ odhadněte polynomem
(použijte např. fci $\log(1+x)$ nebo fci $-\log(1-x)$)

3. Pomocí Taylorova rozvoje vypočtěte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \exp(-\frac{x^2}{2})}{x^4}$$

4. Rozveďte následující funkci v řadu:

$$y(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$$

Řešení:

1a. $T_5^{\mathrm{tg},0}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$

2a. $\sum_{n=0}^{N/2}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{-x^{2n}}{n!}$

2b. $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$, pro $x \in R$

2c. $\sum_{n=0}^{N} 0 \cdot x^n = 0$ nekonverguje k $f(x), x \neq 0$

2d. $\sum_{n=0}^{(N-1)/2}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$, na $(-3, 3)$

2e. $2 \cdot \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pro $|x| < 1$

2f. $\sum_{n=0}^{N}(n+1)x^n$, na $(-1, 1)$

2g. $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

3. $-\frac{1}{12}$

4. $y(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^{(4k)}$