9. Cvičení z MA II. (20.4.10)

Nechť $f: G \subset R^n \to R$, G je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0]$ je i-tý vektor kanonicl é báze R^n. *Parciální derivací fce f podle i-té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).

Značení: $C^1(G)$ ... množina fcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojité parc. derivace podle všech proměnných (tj. fce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité jako fce n proměnných).

1. Určete definiční obor následujících funkcí na R^n, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují:

(a) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} + 1$

(c) $f(x,y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ pro $[x,y] \neq 0$, $f(0,0) = 0$

(d) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pro $[x,y] \neq 0$, $f(0,0) = 0$

Nechť $G \subset R^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. *Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$* rozumíme graf fce T, $x \in R^n$:

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

2. Určete definiční obor následujících funkcí a vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu všude, kde existují. Nalezněte rovnici tečné nadroviny v zadaných bodech:

(a) $f(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z$, v bodě $[e, 1, 2, e^2]$

(b) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$, v bodě $[1, 1, f(1,1)]$

3. Anuloid $A = (x^2 + y^2 + z^2 + 12)^2 - 64(x^2 + y^2) = 0$ popište jako sjednocení grafů dvou fcí dvou proměnných. Existuje k tomuto anuloidu tečná rovina v bodě $[0, 3, \sqrt{3}]$?

4. Nechť $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$.
Určete tečnu T, která je kolmá k přímce $\{[t,t,t] \in R^3; t \in R\}$. Ve kterém bodě protíná T přímku $\{(0,0,t) \in R^3; t \in R\}$?

Řešení:

1a. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{y\cdot \mathrm{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}}$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{x\cdot \mathrm{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}}\cdot$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neex. pro $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ pro $y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ pro $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neex. pro $x \neq 0$

1b. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{8y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neex., $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neex.

1c. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

1d. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

2a. $T(x,y,z) = e^2 + 2e(x-e) - 2e^2(y-1) + e^2(z-2)$, $D_f : x\cdot y > 0$
2b. $2z - x + y = 0$, $D_f : x \neq -y$

3. $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$,
$D_f : 4 \leq x^2+y^2 \leq 36$, spojitost na D_f, ex. parc. der. na okolí b. $[0,3]$, jsou spoj. v b. $[0,3]$

4.
tečna $z = f(\frac{2}{3},\frac{5}{3}) - (x-\frac{2}{3}) - (y-\frac{5}{2})$, protíná x v b. $[0,0,?\frac{17}{2}]$