

9. Cvičení z MA III. (1.a 2.12.09)

Co je to bodová / stejnoměrná / lokálně stejnoměrná konvergence řad funkcí?
Jaké znáte věty o (lokálně) stejnoměrné konvergenční řad funkcí?
(Zde značím stejnoměrnou konvergenci symbolem \Rightarrow .)

1. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řad funkcí.

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ na } [0, 1] \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4+x^2} \text{ na } [0, +\infty)$$

Na kterých maximálních intervalech konvergují následující řady bodově, lokálně stejnoměrně, stejnoměrně?

$$(c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad (d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-7} \\ (e) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2} \quad (f) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{x^2}{n^2}) \quad (g) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{2x}{x^2+n^3} \\ (h) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n} \quad (i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \quad (j) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$$

2. Spočítejte limity:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n+1} \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) \\ (c) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$$

3. Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$ následující posloupnosti funkcí? Jak je to se stejnoměrnou konvergencí f_n na $(0, 1)$?

$$(a) \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad (b) \quad f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (c) \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$$

4. Dokažte, že funkce $\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ má na intervalu $(1, \infty)$ derivace všech řádů.

5. Nechť $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p+x^2n^q}$, kde $p, q \geq 0$. Dokažte, že

- (a) f je spojitá na $(0, \infty)$, pokud $\max p, q > 1$
- (b) f je spojitá na R , pokud $p+q > 2$
- (c) vyšetřete def. obor a spojitost f v závislosti na p, q

6*. Nechť $\mathbf{a} = \{a_k\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel, nechť $\xi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^x}$. Co lze říci o def. oboru, spojitosti a derivacích funkce ξ ?

Řešení:

1a. nekonverg. na $[0, 1]$ **1b.** stejnoměrně (Weierstrass) **1c.** bodově na $(-1, 1)$, stejnoměrně na $[-1 + \epsilon, 1 - \epsilon]$, $\epsilon \in (0, 1)$, lokálně stejnoměrně na $(-1, 1)$ **1d.** stejnoměrně na $[-1 + \epsilon, 0)$, $(0, 1 - \epsilon]$, $\epsilon \in (0, 1)$ (přestože prvních 6 členů v okolí 0 neomezených) **1e.** stejnoměrně na R , i řada abs. hodnot (Weierstrass) **1f.** bodově na R (absolutně), stejnoměrná na omez. intervalech (Weierstrass), není omez. na okolí $+$, $-\infty$ (nutná p.) **1g.** stejnoměrně na R (Weierstrass), i pro řadu abs. hodnot **1h.** bodově (absolutně) na $M = \{x \in R; x \neq -2^n, n \in N\}$, stejnoměrně na $(K, +\infty) \cap M$, $K \in R$ (Weierstrass), není stejnoměrná na $(-\infty, K) \cap M$ (nutná podm.) **1i.** bodově na $M = \{x \in R; -x \notin N\}$ (neabsolutně), není stejnoměrná na $(-\infty, K) \cap M$ (nutná podm.) stejnoměrně na $(K, +\infty) \cap M$, $K \in R$ (Dirichlet) **1j.** stejnoměrně na R (neabsolutně, Dirichlet)

2a. konverg. stejnoměrně na $(0, +\infty)$ (Abel), $\lim \dots = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{2} \log 2$ **2b.** 1 **2c.** 1 (konverguje stejnoměrně např. na $(-1, \infty)$, Weierstrass)

3a. $f_n \rightarrow 0$ na R , ne stejnoměrně na $(0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$ **3b.** $f_n \rightarrow 0$ na $[0, 1]$, ne stejnoměrně na $(0, 1)$ **3c.** $f_n \Rightarrow 0$ na $(0, 1)$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$

4. řada n -tých derivací konv. lok. stejnoměrně na $(1, \text{infy})$, $\forall n$ (Weierstrass)

5a. konverguje lok. stejnoměrně na $(0, \infty)$ (Weierstrass) **5b.** konverguje stejnoměrně na R **5c.** pro $\max(p, q) \leq 1$ je $D_f = 0$, pro $\max(p, q) > 1$ je $D_f = R$; pro $\max(p, q) > 1$ je f spojitá na R ; pro $p + q > 2$ nebo $p > q$ je f spojitá na R ; pro $p + q \leq 2$ a $p < q$ není f spojitá v 0

6*. D_ξ je 0, (α, ∞) , $[\alpha, \infty)$, nebo R ; ξ je spojitá na svém def. oboru; pro $x \in (\alpha, \infty)$ (pro def. obor (α, ∞) nebo $[\alpha, \infty)$), resp. $x \in R$ má fce ξ pro všechna $n \in N$ vlastní n -tou derivaci, pro $[\alpha, \infty)$ i der. zprava v b. α (pokud konverguje - nemusí) (Weierstrass, Abel + věty o záměnách), $\xi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_k \log^n k}{k^x}$