

10. Cvičení z MA III. (8. a 9.12.09)

Co je to mocninná řada? Jak zjistíte její poloměr konvergence R ?

Jaké věty platí pro mocninné řady (lokálně stejnoměrná konvergence na $(-R, R) \Rightarrow$ možnost záměny \lim, \sum ; integrování a derivace člen po členu; $\lim_{x \rightarrow R^-}$)

1. Určete poloměr konvergence, vyšetřete konvergenci v krajních bodech intervalu konvergence.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n \cdot 2^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n(n+2)}$
(e) $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)x^n$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n \cdot x^n}{\sqrt{2^n}}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$ (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{(n^2)!}$
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(n+1) \log(n+1)}$ (j) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \cdot x^{2n}$ (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n \cdot \sqrt{n}}$

2. Na intervalu konvergence sečtěte mocninné řady:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}x^{n-1}$
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2nx^{2n-1}$
(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^{n+1}}$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$ (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$ (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Řešení:

1a. $(-3, 3)$ **1b.** $[-1, 1)$, pro $x = -1$ neabs. **1c.** $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, pro $x = \pm\sqrt{2}$ neabs.
1d. $[-3, -1]$, pro $x = -3, -1$ abs. **1e.** $\{0\}$ **1f.** $(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$ **1g.** $[-2, 8)$, pro $x = -2$ neabs. **1h.** R **1i.** $(0, 2)$ **1j.** $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ **1k.** $[-5, 1)$, pro $x = -5$ neabs.
2a. $\frac{1}{1-x}$ na $(-1, 1)$ **2b.** $\frac{x}{(1-x)^2}$ na $(-1, 1)$ **2c.** $\log \frac{2}{3-x}$ na $[-1, 3)$ **2d.** $\frac{1}{(1-2x)^2}$ na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ **2e.** $\frac{2}{(1-x)^3}$ na $(-1, 1)$ **2f.** $x + (1-x) \log(1-x)$ pro $[-1, 1)$, 1 pro $x = 1$
2g. $\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ pro $(-1, 1)$ **2h.** $-\log|1-x|$ pro $[-1, 1)$ **2i.** $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ pro $(-1, 1)$ **2j.** $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ **2k.** $\frac{1}{2} - \log 2$, z 2f. $(x = \frac{1}{2})$ **2l.** $\frac{1}{4} \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^3}$, z 2e. $(x = \frac{1}{4})$ **2m.** $\frac{9}{4}$, z 2b. $(x = \frac{1}{3})$, pozor na "meze" **2n.** $\frac{3}{4}$