

#### 4. Cvičení z MA II. (17. a 19. 3. 09)

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Spočítejte primitivní funkce:

- (a)  $\int x^n \ln x \, dx$  (b)  $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx$  (c)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} \, dx$   
(d)  $\int \sin x \cdot \sqrt{2 + \cos x} \, dx$  (e)  $\int \frac{e^{5x}-1}{e^{2x}} \, dx$  (f)  $\int x \cdot \sqrt{x^2 + 1} \, dx$   
(g)  $\int x \cdot \sqrt{2 - 3x^2} \, dx$  (h)  $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} \, dx$  (i)  $\int \frac{1}{x^2-1} \, dx$   
(j)  $\int \frac{5x}{2x+3} \, dx$  (k)  $\int \sin x \cos 2x \, dx$  (l)  $\int \sin x \sin 2x \, dx$

2. Příklady na substituci II:

- (a)  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx$  (b)  $\int \frac{1}{x+2\sqrt{x+2}} \, dx$   
(c)  $\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})} \, dx$

3. Důležité příklady:

- (a)  $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$  (na  $(0, \pi)$ , např. užíjte substituci  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ )  
(b)  $\int \frac{1}{1+3\sin^2 x} \, dx$  (na  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , užíjte např. substituci  $\operatorname{tg} x = t$ )  
(c)  $\int \frac{1}{x+(\sqrt{x^2+x+1})} \, dx$  (Nápověda: zkuste substituci  $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$ )

4. A další příklady na určování primitivní funkce:

- (a)  $\int \frac{x^{17}-5}{x-1} \, dx$  (b)  $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} \, dx$  (c)  $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} \, dx$   
(d)  $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2} \, dx$  (e)  $\int \cos^2 x \, dx$  (f)  $\int \log(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$   
(g)  $\int \arcsin \sin \frac{4x}{x^2+1} \, dx$  (lepení!) (h)  $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg} x} \, dx$

**Řešení:** (až na c)

**2a.**  $2\sqrt{x} - 2\log|1 + \sqrt{x}|$  na  $(0, +\infty)$     **2b.**  $\log(x + \sqrt{x+2}) - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x+1})$  na  $(0, +\infty)$

**2c.**  $3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\log\sqrt[6]{x} + 6\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\frac{1}{\sqrt{x}}$  na  $R$

**3a.**  $\log \operatorname{tg} \frac{x}{2} \equiv \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ , na  $(0, \pi)$     **3b.**  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \cdot \operatorname{tg} x)$ , na  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

**3c.**  $\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 2\log|\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2| - \frac{1}{2} \log|2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1|$ , na  $(-\infty, -1)$  a na  $(-1, \infty)$

**4a.**  $\sum_1^{17} \frac{x^k}{k} - 4\log|x - 1|$ , na  $(-\infty, 1)$  a na  $(1, \infty)$     **4b.**  $\frac{-10 \cdot 5^{-x} \log 2 + 2^{-x} \log 5}{5 \log 5 \log 2}$ , na

$R$     **4c.**  $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$ , na  $R$     **4d.**  $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \log|e^x - 1| + \frac{1}{6} \log(e^x + 2)$ , na  $(-\infty, 0)$

a na  $(0, \infty)$     **4e.**  $\frac{1}{2}(\sin x \cos x + x)$ , na  $R$     **4f.**  $x \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1}$ , na

$R$     **4g.**  $2\log(x^2 + 1)$  na zákl. intervalu  $\langle \frac{-4 + \sqrt{16 - \pi^2}}{\pi}, \frac{4 - \sqrt{16 - \pi^2}}{\pi} \rangle$ ,  $-2\log|x^2 + 1| - \pi x$

na zákl. intervalu  $\langle \frac{4 - \sqrt{16 - \pi^2}}{\pi}, \frac{4 + \sqrt{16 - \pi^2}}{\pi} \rangle$ ; nutno "poslepovat"    **4h.**  $\ln|1 + \operatorname{tg} x|$  na

$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi)$  a na  $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$