Cvičení z MA II. - Vázané extrémy

Ještě extrémy funkcí, tentokrát vázané.

2. Zjistěte lokální extrémy funkcí na zadaných množinách – využijte Lagrangeových multiplikátorů.

(a) $f(x,y) = \sqrt{3}x - y + 2$ za podmínky $x^2 + 2x + y^2 = 0$

(b) $f(x,y) = y$ na množině $M = \{(x,y) \in R^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$

(c) $f(x,y) = y^2 - 2x + x^2$ na množině $M = \{(x,y) \in R^2 \mid x = y^2\}$

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$ na množině
$M = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 5\}$

(e) $f(x,y) = x^2 - y^2$ na množině $M = \{(x,y) \in R^2 \mid y + e^{-x^2} - 1 = 0\}$

3. Najděte největší a nejmenší hodnoty funkcí – v jakých bodech je funkce nabývají? (Pokud funkce nenabývá extrémů, vyšetřujte sup a inf.)

(a) $f(x,y,z) = x$ na množině
$M = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^3 + y^3 + z^3 = 0\}$

(b) $f(x,y) = \sin x + \sin y$ na $M = \{(x,y) \in R^2;\ x^2 + y^2 < \frac{\pi^2}{4}\}$

4. A nějaké 'slovní úlohy':

(a) Jaká je vzdálenost parabol $p_1 : y = -x^2$ a $p_2 : y = (x-6)^2$?

(b) Tlustostěnná baňka válcovitého tvaru se stěnami i dnem silnými $4mm$ pojme $2l$ kapaliny s tím, že zůstanou ještě $2cm$ k okraji. Určete rozměry baňky, aby plocha styku kapaliny s baňkou byla co nejmenší.

(c) Jaký je nejekonomičtější tvar válcové konzervy s daným objemem?

(d) Město B je 10 km východně od města A a město C je 3 km jižně od B. Z A do C se má postavit dálnice. Cena při budování dálnice podél existující silnice z A do B je 4 miliony Kč na km, zatímco cena kdekoliv jinde je 5 milionů Kč na kilometr. Kudy by se měla vést dálnice, aby se minimalizovaly náklady?

Řešení:

2a. lokální=globální minimum v b. $(-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{1}{2})$, lokální=globální maximum v b. $(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\frac{1}{2})$
2b. $(0,0)$ není extrém; $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ ostrá lok. maximum vzhledem k M
2c. $(0,0)$ ostrá lok. maximum vzhl. k M; $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ ostrá lok. minima vzhl. k M
2d. $(3,2)$ ostré lok. minimum; $(2-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}})$ ostré lok. maximum; podezřelý bod na hranici $(2+\frac{3}{\sqrt{5}}, +\frac{6}{\sqrt{5}})$ není extrémem
2e. $(0,0)$ ostré lok. minimum

3a. podezřelé body $(0,0,0)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$; ostré lok. maximum $\frac{1}{\sqrt{2}}$ vzhl. k M v b. $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; ostré lok. minimum $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ vzhl. k M v b. $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$
3b. $\sup f(M) = 2\sin\frac{\pi}{\sqrt{8}}$; $\inf f(M) = 2 - \sin\frac{\pi}{\sqrt{8}}$

4a.
4b.
4c.
4d.