5. Cvičení z MA II. (24. a 26. 3.09)

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Rozcvička:

(a) $\int \frac{\log x}{x(1+\log x)}\ dx$ (b) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\ dx$

(c) $\int \log(x+\sqrt{1+x^2})\ dx$ (d) $\int \arccos x\ dx$

(e) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\ dx$

2. Zvolte vhodnou substituci a spočítejte (na intervalech, které jsou 'přirozeným' definičním oborem výsledných primitivních funkcí):

(a) $\int \sin^3 x \cos^2 x\ dx$ (b) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\ dx$

(c) $\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}\ dx$ (d) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\ dx$

(e) $\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\ dx$ (f) $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\ dx$

(g) $\int \frac{1}{5+4\sin x}\ dx$ (h) $\int \frac{1}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}\ dx$

(i) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\ dx$ (j) $\int \frac{1}{\sin x\cos^4 x}\ dx$

(k) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\ dx$

Řešení: (až na c)
1a. $\log x - \log|1+\log x|$, na $(0,\frac{1}{e})$ a na $(\frac{1}{e},\infty)$ **1b.** $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$, na $(0,\infty)$
1c. $x\log(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}$, na R **1d.** $x\cdot\arccos x-\sqrt{1-x^2}$, na $(-1,1)$ **1e.** $-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}$, na $(0,1)$
2a. $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x$, na R **2b.** $\frac{1}{\cos x-1}$, na $(2k\pi,2(k+1)\pi), k\in Z$ **2c.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log|\sin x+\cos x|$, na $D_f(x\neq -\frac{\pi}{4}+2k\pi, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z)$ **2d.** $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$, platí na D_f mimo body $\frac{\pi}{2}+k\pi$, posun vždy o $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ **2e.** $\frac{-1}{1+\operatorname{tg} x}$, na D_f mimo $\frac{\pi}{2}+k\pi$, lze spoj. dodef. 0 **2f.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{5}}(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1))$, mimo $\pi+2k\pi, k\in Z$, posun vždy o $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ **2g.** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\frac{1}{3}(5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4))$, mimo $(2k+1)\pi, k\in Z$, posun vždy o $\frac{2\pi}{3}$ **2h.** $-\frac{1}{2}(\operatorname{cotg} x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg} x))$, mimo $\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$ **2i.** $\frac{1}{6}\log((1-\cos x)(2+\cos x)^2/(1+\cos x)^3)$, mimo $k\pi, k\in Z$ $(\equiv\frac{1}{3}\log(|t|(t^2+3))$, kde $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2})$ **2j.** $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x}+\frac{1}{2}\log\sqrt{\frac{\cos x-1}{\cos x+1}}$ $(\equiv\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x}+\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|)$, mimo $\frac{k\pi}{2}, k\in Z$ **2k.** $\log(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1})$, na R