## Cvičení z MA II. - Implicitní funkce

Ještě derivace složených funkcí.

**1. rozcvička:** Derivujte podle všech proměnných.

(a) funkci $t \to u$, kde $u = e^{x-2y},\ x = \sin t,\ y = t^3$

(b) funkci $t \to z$, kde $z = \arcsin(x-y),\ x = 3t,\ y = 4t^3$

(c) funkci $(r, \varphi) \to z$, kde $z = x^2y - xy^2,\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

(d) Nechť funkce $(u, v, w) \to f(u, v, w)$ má spoj. parc. der. 2. řádu na $R^3$. Spočítejte parc. der. 2. řádu funkce $p(x, y, z) = f(x, xy, xyz)$.

(e) Spočítejte hodnoty parc. der. 1. a 2. řádu fce $F(x, y) = g(xy, \frac{x}{y})$ v bodě $A = (3, 2)$.

**Věta o implicitních funkcích.**

**2.** Je zadaná funkce $F(x, y)$ a dvě čísla $x_0, y_0$ taková, že $F(x_0, y_0) = 0$. Dokažte, že v nějakém okolí $U$ bodu $(x_0, y_0)$ existuje funkce $f = f(x)$ splňující podmínky $f(x_0) = y_0$ a $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Určete $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.

(a) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4,\ (x_0, y_0) = (6, 2)$

(b) $F(x, y) = x\sin y - \cos y + \cos 2y,\ (x_0, y_0) = (1, 0)$

(c) $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1,\ (x_0, y_0) = (0, 1)$

**3.** Funkce $f = f(x, y)$ je dána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ a podmínkou $f(x_0, y_0) = z_0$. Určete derivace $f$ podle všech proměnných (a vypočítejte pro zadané body).

(a) $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 2z + 3,\ (x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, -2)$

(b) $F(x, y, z) = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1,\ (x_0, y_0, z_0) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$

(c) $F(x, y, z) = e^z + x^2y + z + 5,\ (x_0, y_0, z_0) = (1, -6, 0)$

**4.** Ukažte, že zadanou množinu $M$ lze na okolí daného bodu $a$ popsat jako graf funkce $f$. Spočtěte její (parc.) derivace prvního a druhého řádu v příslušném bodu.

(a) $M = \{(x,y) \in R^2;\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0\}$ v okolí b. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

(b) $M = \{(x,y) \in R^2;\ \log\sqrt{x^2+y^2} = \ \mathrm{arctg}\ \frac{y}{x}\}$ v okolí b. $(1,0)$, kde $f(1) = 0$

(c) $M = \{(x,y,z) \in R^3;\ x\sin z + y\cos z - e^z = 0\}$ v okolí b. $(2,1,0)$,
kde $f(2,1) = 0$. Napište rovnici její tečny v b. $(2,1,0)$.

**Řešení:**
**1a. 1b. 1c.**
**1d.** např. $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v} + yz\frac{\partial f}{\partial w}$ ; např. $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = x^2y^2\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}$
**1e.** např. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(3,2) = 4\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(6,\frac{3}{2}) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(6,\frac{3}{2}) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(6,\frac{3}{2})$, kde $g = g(u,v)$

**2a.** $f'(6) = \frac{4}{3},\ f''(6) = \frac{17}{27}(?)$
**2b.** $f'(0) = f''(0) = 0$
**2c.** $f'(0) = 0,\ f''(0) = f'''(0) = -\frac{2}{3}$

**3a.** $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = -\frac{1}{5},\ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = -\frac{3}{5}$
**3b.** $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}) = -1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}) = 0$
**3c.** $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-6) = 6,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,-6) = -\frac{1}{2}$

**4a.** $f'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0\ ,\ f''(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{23}{4}(?)$
**4b.** $f'(1) = 1\ ,\ f''(1) = 2$
**4c.** $T(x,y) = 0\cdot(x-2) - 1\cdot(y-1) = 1-y$