Cvičení z MA II. – spojitost

Jak se definuje spojité zobrazení (různé definice)? Jak se chovají spojitá zobrazení k otevřeným / uzavřeným množinám? Jak se chovají spojitá zobrazení k aritmetickým operacím, ke skládání?

1. Zkoumejte spojitost následujících funkcí:

(a) Ukažte, že polynomy více proměnných jsou spojité funkce $P : R^n \to R$.
(b) Mějme (M, ρ) – ukažte, že metrika ρ je spojitá funkce na $M \times M$.
($\forall x, y \in M : x_n \to x,\ y_n \to y \Rightarrow \rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$)

2. Zkoumejte následující funkce na (R^n, eukleid. metrika) – určete definiční obor (jde o ot. či uz. množinu?), spojitost, vrstevnice. Nabývají tyto funkce na svém definičním oboru globálního maxima a minima?

(a) $f(x, y) = \sqrt{\log(x - y)}$ (b) $f(x, y) = \log(\sqrt{y + 1} - x)$

(c) $f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} - 1}$ (d) $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2} - 1}$

(e) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (f) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

(g) $f(x, y) = \arcsin xy$ (h) $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x+1}$

3. Jsou následující fce spojité? Nabývají na R^2 své největší a nejmenší hodnoty? Jaké?

(a) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0],\ f(0, 0) = 0$

(b) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0],\ f(0, 0) = 0$

(c) $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0],\ f(0, 0) = 0$

4. Lze následující funkce spojitě rozšířit na R^2?

(a) $f(x, y) = (x + y)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(b) $f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(c) $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

(d) $f(x, y) = \frac{\sin x+\sin y}{x+y}$

Řešení:

2a-h. spojité na svých definičních oborech

3a. není spojitá v b. $[0,0]$, omezená **3b.** spojitá, není omezená **3c.** není spojitá v b. $[0,0]$, omezená

4a. spojitá pro $f([0,0]) := 0$ **4b.** spojitá pro $f([0,0]) := 0$ **4c.** nelze spojitě dodefinovat v b. $[0,0]$ **4d.** spojitá pro $f([a,-a]) := \cos a \quad \forall a \in R$