# 4. Cvičení z MA I. (29. a 30.10.08)

Aritmetika limit. Věta o dvou policajtech. Limita omezené monotonní posloupnosti.

**Rozcvička.**

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2+2}$ (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-n^2+1}{n^3+2n^2-n}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$ (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2+1}$ (f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2-1}$

**1.** Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

(a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n+2} - \frac{n}{2}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lfloor xk \rfloor}{n^2}$ (parametr $x \in R$, $\lfloor x \rfloor$ ... celá část $x$)

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sqrt[3]{8n^6-n}}$ (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^4}$

**2.** Příklady z cvičení 4 z minulé hodiny:

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$ (j) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$

(k) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (l) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$

(m) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+4n+n\sin n}{n\cos 3n+(2n+\sin n)^2}$ (n) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt[2]{n^3+1}}$

**3.** Určete, čemu se rovnají limity pro $q \in R$:

(a) $\lim_{n\to\infty} q^n$, (b) $lim_{n\to\infty} n \cdot q^n$ (c) $lim_{n\to\infty} n^k \cdot q^n$

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ $a \in R$, $a \geq 0$ (e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ (g) $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!}$

(h) $lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$ (i) $lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!}$, $k \in N$

**4.** Spočítejte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}\cdot(2^n-n)}{(n^2-n+1)(n!+\ln n)}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n!}{n+1}$ (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+2n^n+n!}{(n+1)^4+\sin n+(3n)!}$

**5.** Spočítejte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$, $a, b, c \in R^+$ (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \ldots \sqrt[2^n]{2}$

**Řešení:**

1a. 1 1b. $-\frac{1}{2}$ 1c. $\frac{x}{2}$ 1d. $\frac{1}{4}$ 1e. $\frac{1}{4}$

2i. 0 2j. 0 2k. $\frac{1}{2}$ 2l. 1 2m. $\frac{1}{2}$ 2n. 0

3a. 3b. 3c. 3d. 1 3e. 1 3f. $+\infty$ 3g. 0 3h. 0 3i. 0

4a. 0 4b. 0 4c. 0 4d. 0

5a. $\max\{a, b, c\}$ 5b. 2