2. Cvičení z MA I. (8. a 9.10.08)

M. Lopatková

`http://ufal.mff.cuni.cz/~lopatkova`

Jak probíhá důkaz matematickou indukcí?

1. Dokažte, že pro všechna přirozená n platí:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 \qquad (= \sum_{k=1}^{n} k)^2$

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ pro $n \geq 2$ (e) Vypočítejte pro $x \in R$: $\sum_{k=1}^{n} x^k$

2. Dokažte pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená n a reálná $x > -1$ platí tzv. **Bernoulliho nerovnost**:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

3. Dokažte tzv. de Morganova pravidla pro množiny A a B_i ($i = 1 .. n$):

(a) $A \setminus \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$

(b) $A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$

4. Dokažte pro všechna přirozená n:

(a) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ (b) $n^2 \leq 2^n$

5. Dokažte pro všechna přirozená n a reálná x taková, že $0 \leq x_k \leq \pi$:

$$|\sin(\sum_{k=1}^{n} x_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$$

6. Dokažte pro všechna přirozená n, kde e je základ přirozeného logaritmu:

$$(\tfrac{n}{e})^n \leq n! \leq (\tfrac{n+1}{2})^n$$

(Nápověda: pro horní odhad lze užít AG nerovnost; dále platí $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$)

7. Dokažte AG nerovnost pro všechna $x_i \in R, x_i \geq 0$ a $n \in N$:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \;\leq\; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

(Nápověda: MI s krokem $n \to 2n$; potom zpětnou indukcí $n \to n-1$;
tip: zvolte $x_n := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k$)