

## 6. Cvičení z MA I. (12. a 13.11.08)

**Rozcvička.** Spočítejte limity (příklady z předminulé hodiny a 2 nové):

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!} & \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} \cdot (2^n - n)}{(n^2 - n + 1)(n! + \ln n)} \\ \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n!}{n+1} & \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2n^n + n!}{(n+1)^4 + \sin n + (3n)!} \\ \text{(e)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) & \text{(f)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + \dots + n^3}{n^4} \end{array}$$

1. Spočítejte následující limity:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor} & \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n} \cdot \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n \quad (i \text{ je imaginární číslo}) \\ \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) & \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{\sqrt{n^7} + \sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7} - \sqrt[3]{n^7}} \right) \end{array}$$

2. Dokažte, že následující rekurentně zadaná posloupnost  $\{a_n\}$  má limitu a spočítejte ji:

$$a_1 = \sqrt{c} \quad (c > 0, c \in \mathbb{R}), \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

3. Zjistěte, pro která reálná čísla  $x$  je následující posloupnost monotonní:

$$\left\{ \left( \frac{x^3}{3x-2} \right)^n \right\}$$

4. Určete limity v závislosti na  $k, l \in \mathbb{N}$ :

$$\text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k - (n-1)^l}{n^k + n^l} \quad \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l}$$

5. Spočítejte:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

**Řešení:**

Ra. 0   Rb. 0   Rc. 0   Rd. 0   Re. neex.   Rf.  $\frac{1}{4}$

1a. 2   1b. 0   1c. 0   1d.  $\frac{2}{3}$

3. konst. pro  $x \in \{-2, 0, 1\}$ , rost. pro  $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{2}{3}; 1) \cup (1; +\infty)$ , kles.  
pro pro  $x \in (-2; 0)$

4a. 1 pro  $k > l$ ,  $-1$  pro  $k < l$ , 0 pro  $k = l$

4b. 1 pro  $k > l$ ,  $(-1)^{1+l}$  pro  $k < l$ ,  $-\infty$  pro  $k = l$  sudé,  $-1$  pro  $k = l$  liché

5.  $\frac{1}{2}$