

3. Cvičení z MA I. (19.10.06)

Co je to supremum, infimum, maximum, minimum? Příklad množiny, která má supremum, ale ne maximum; příklad množiny bez suprema.

1. Najděte suprema a infima následujících množin v R (pokud existují); existují pro ně maxima a minima?

(a) $A_1 = \{-\frac{1}{n}; n \in N\}$ (b) $A_2 = \{\frac{n+(-1)^n}{n}; n \in N\}$

(c) $A_3 = \{n^{(-1)^n}; n \in N\}$ (d) $A_4 = \{q < \sqrt{3}; q \in Q\}$

(e) $A_5 = \{\sin x \cos x; x \in R\}$

Co je to posloupnost, monotónní posloupnost? Jaká je definice limity pro posloupnosti; nevlastní limita?

2. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti monotónní.

(a) $\{2n + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\{\frac{1}{1+n^2}\}_{n=1}^{\infty}$

(c) $\{\frac{n+1}{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$ (d) $\{\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-2}}\}_{n=1}^{\infty}$

3. Spočítejte přímo podle definice limitu posloupnosti:

(a) $\{\frac{1}{1+n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\{\frac{n+1}{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$

4. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(-1)^n$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n!}$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5n}{-n^2+4n}$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5^n+10^n}{-2^{n+1}+5^{n+1}+10^{n+1}}$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2(n\pi/4)$ (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n^2$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$ (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$

(k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$

(m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+4n+n \sin n}{n \cos 3n+(2n+\sin n)^2}$ (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt[2]{n^3+1}}$

Řešení:

1a. $\sup A_1 = 0, \inf A_1 = -1 = \min, \max$ neex.

1b. $\sup A_2 = \frac{3}{2} = \max, \inf A_2 = 0 = \min$

1c. $\sup A_3$ neex., $\inf A_3 = 0, \min$ neex.

1d. $\sup A_4 = \sqrt{3}, \inf, \max, \min$ neex.

1e. $\sup A_5 = \frac{1}{2} = \max, \inf A_5 = -\frac{1}{2} = \min$

2a. nekles. 2b. kles. 2c. rost. 2d. nekles.

3a. 0 3b. 1

4a. neex. 4b. $\cos 1$ 4c. 1 4d. 0 4e. -3 4f. $\frac{1}{10}$ 4g. neex. 4h. 0 4i. 0
4j. 0 4k. $\frac{1}{2}$ 4l. 1 4m. $\frac{1}{2}$ 4n. 0