

1. Cvičení z MA I. (1. a 2.10.08)

M. Lopatková

<http://ufal.mff.cuni.cz/~lopatkova>

Co je relace, zobrazení, funkce? Vlastnosti relace. Absolutní hodnota udává "vzdálenost" (vlastnosti vzdálenosti). Jak jinak lze měřit vzdálenost?

1. Řešte nerovnice v R :

- (a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$ (b) $\frac{x+3}{x-1} \geq \frac{x+1}{x-5}$ (c) $|5x-2| < x$
(d) $\frac{|x+1|}{x-1} \geq x$ (e) $||x-2|+1| \leq 5$ (f) $|x^2-4x+3| \leq |x^2-4|$
(g) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0$ (h) $\cos^2 x > \sin^2 x$

2. Ukažte, že pro všechna $a, b \in R$ platí:

- (a) $|a+b| \leq |a|+|b|$
(b) $||a|-|b|| \leq |a-b|$
(c) $|a-b| \leq |a-c|+|c-b|$

3. **AG nerovnost:** Pro kladná reálná x_1, \dots, x_n platí:

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

Dokažte pro $n=2$.

4. Nakreslete grafy funkcí:

- (a) $|||x|-1|-1|-1|$, $||x-1|^2-1|$, $||x-1|-1|^2$
(b) $\cos x$, $\cos(x+\pi)$, $\cos(2x+\pi)$, $\sin|x|$, $|\sin x|$
(c) $\sin x^2$, $\sin \frac{1}{x}$, $\ln \sin x$, $\ln \ln \sin x$

5. Ukažte, že každý celočíselný obnos větší nebo roven 8 lze vyplatit pětikorunami a tříkorunami.

6. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

- (a) $\forall x \in N \quad \exists y \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

$$(b) \quad \exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in N \text{ platí: } z > x \Rightarrow y < z$$

$$(c) \quad \exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in R \text{ platí: } z > x \Rightarrow y < z$$

7. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

$$(a) \quad A \Rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A, \neg(A \& \neg B), \neg A \vee B$$

$$(b) \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow C, A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

8. Který z následujících výroků je silnější?

$$(a) \quad \forall x \in R \quad \exists K > 0, K \in R \text{ takové, že } |f(x+1) - f(x)| \leq K$$

$$(b) \quad \exists K > 0, K \in R \quad \forall x \in R \text{ takové, že } |f(x+1) - f(x)| \leq K$$

9. Mějme zobrazení $f : X \rightarrow Y$ a množiny $A, B \subset X$. Jaké musí mít f, A, B vlastnosti, aby platily následující vztahy?

$$(a) \quad \forall A \quad f^{-1}(f(A)) = A \quad (b) \quad \forall A \quad f(f^{-1}(A)) = A$$

$$(c) \quad \forall A, B \quad f(A) \cup f(B) = f(A \cup B) \quad (d) \quad \forall A, B \quad f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$$

$$(e) \quad \forall A, B \quad f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B) \quad (f) \quad \forall A, B \quad f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$$

10. Dokažte, že pro $\forall x \in R, \forall y \in R, \forall n \in N$ platí (z axiomů pro reálná čísla)

$$(a) \quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \quad (b) \quad -x = (-1) \cdot x$$

$$(c) \quad (x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0) \quad (d) \quad (0 \leq x < y) \Rightarrow x^n < y^n$$

Řešení:

$$\begin{array}{llll} 1a. (4; 6) & 1b. \langle -\infty; -7 \rangle \cup (1, 5) & 1c. (1/3; 1/2) & 1d. \langle -\infty; 1 - \sqrt{2} \rangle \cup (1; 1 + \sqrt{2}) \\ 1e. \langle -2; 6 \rangle & 1f. \langle 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{7}{4} \rangle \cup \langle 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}; +\infty \rangle & 1g. \langle 1; 2 \rangle & 1h. \bigcup_{k \in Z} \langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \rangle \end{array}$$