## 11. Cvičení z MA III. (12.12.07)

**1.** Vázané extrémy, jemnější podmínka (př. z minulé hodiny 2c,2e).

(a) $f(x,y) = y^2 - 2x + x^2$ na množině $M = \{(x,y) \in R^2 \mid x = y^2\}$

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ na množině $M = \{(x,y) \in R^2 \mid y + e^{-x^2} - 1 = 0\}$

**Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu:**
(*) $y'(x) = f(x, y(x))$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$
řešení: funkce $y = y(x)$ a interval $I \ni x_0$ takové, že platí:
(i) $y$ je definovaná na $I$
(ii) $y$ má na $I$ vlastní derivaci
(iii) $y$ řeší rovnici (*) a splňuje poč. podmínku

**Rovnice se separovanými proměnnými:**
$y(x) = f(x) \cdot g(y)$ , kde fce $f$ spoj. na int. $I$, fce $g \circ y$ spoj. na int. $I$

**2.** Najděte obecné řešení rovnice a pro zadané počáteční podmínky maximální řešení.

(a) $y'(x) = x$ , poč. podmínka $y(0) = e$

(b) $y'(x) = y(x)$,
pro různé poč. podmínky (i) $y(0) = 0$, (ii) $y(0) = 2$ (iii) $y(1) = -e$

(c) $y'(x) = 2\sqrt{y(x)}$ ,
poč. podmínky (i) $y(0) = 0$, (ii) $y(-1) = 0$, (iii) $y(-1) = 1$

(d) $y'(x) = \frac{1+y(x)}{1-x}$, poč. podmínky (i) $y(0) = 0$, (ii) $y(2) = 0$, (iii) $y(2) = -2$

(e) $y'(x) = \frac{-xy(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, poč. podmínka (i) $y(0) = 0$, (ii) $y(0) = 1$, (iii) $y(0) = -e$.
Nastanou ‘skluzy’?

(f) $y'(x) = \frac{y}{x}$, poč. podmínka $y(x_0) = y_0$

**Řešení:**

**1a.** $(0,0)$ ostrá lok. maximum vzhl. k $M$; $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ ostrá lok. minima vzhl. k $M$

**1b.** $(0,0)$ ostré lok. minimum

**2a.** $y_{ob}(x) = \frac{x^2}{2} + c$ , kde $x \in R,\ c \in R$; pro poč. podm. $c = e$

**2b.** $y_{ob}(x) = C \cdot e^x$ , kde $x \in R,\ C \in R$;
pro poč. podm. (i) $C = 0$, (ii) $C = 2$, (iii) $C = -1$

**2c.** $y_{ob}(x) = (x+c)^2$ , pro $x > -c$ a $y \equiv 0$ pro $x \leq -c$, $c \in R$;
pro poč. podm. $y_0 = 0$ nemá jednozn. řeš., (iii) $c = 2$ jednoznačné

**2d.** $y_{ob}(x) = \frac{C}{1-x} - 1$ , pro $C \in R$, $x \in (-\infty, 1)$ nebo $x \in (1, +\infty)$;
pro poč. podm. (i) $C = 1$, (ii) $C = -1$, (iii) $C = 1$

**2e.** $y_{ob}(x) = Ke^{\sqrt{1-x^2}}$ , pro $K \in R$, $x \in (-1, 1)$;
pro poč. podm. (i) $K = 0$, (ii) $K = \frac{1}{e}$, (iii) $K = -1$

**2f.** $y_{ob}(x) = Kx$ , kde $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$, $K \in R$
pro poč. podm. $K = \frac{y_0}{x_0}$