

## 1. Cvičení z MA III. (3.10.07)

Co je to metrický prostor? Jaké má vlastnosti metrika? K čemu metriky? Limita v abstraktních prostorech.

1. Ukažte, že následující předpisy definují metriky:

(a)  $R : \rho(x, y) = |x - y|$

(b)  $R^n, n \in N : (\text{manhattanská}) \quad \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

(c)  $R^n, n \in N : (\text{eukleidovská}) \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$

( Tip: Cauchyho nerovnost:  $(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)$  )

Zobecnění:  $\rho_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p} \quad (p \geq 1), p \in R$

(d)  $R^n, n \in N : \quad \rho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|; 1 \leq i \leq n\} \quad (p \rightarrow \infty)$

méně názorná metrika:

(e)  $P \neq 0 : \rho(x, y) = 1, \text{ pokud } x \neq y, \rho(x, y) = 0, \text{ pokud } x = y$

2. Další vlastnosti prostoru  $R^n$  s metrikami (b), (c) a (d) z cvičení 1.:

(a) Konvergence v  $R^n$  (po složkách) – ukažte např. pro eukleidovskou metriku!

(b) Ukažte ekvivalenci metrik (b), (c) a (d) z cvičení 1.

(postač. podm. pro ekviv.  $\rho_i, \rho_j : \exists r, s : 0 < r \leq s$  takové, že pro  $\forall x, y$  platí:

$$r \cdot \rho_i(x, y) \leq \rho_j(x, y) \leq s \cdot \rho_i(x, y))$$

(c) Jak vypadá jednotková koule v  $R^n$  s metrikami (b), (c) a (d) z cvičení 1.?

Jak se definuje otevřená, uzavřená množina? Co jsou limitní a izolované body? Co je hranice, uzávěr, vnitřek množiny?

3. Zkoumejte následující množiny v  $R^n$  (otevřenost, uzavřenost, vnitřek, hranice, uzávěr):

(a) Ukažte, že koule  $B(a, r) = \{x \in R^n; \rho(a, x) < r\}$  je otevřená množina.  
Ukažte, že každá konečná množina v  $R^n$  je uzavřená.

(b)  $\{[x, y] \in R^2; y > x^2, x^2 + y^2 < 2\}$

(c)  $\{[x, y] \in R^2; y \geq x^2\} \cup \{[0, -1]\}$

- (d)  $\{[x, y] \in R^2; 1 \leq x < 2, 1 \leq y < 2\}$
- (e)  $\{[x, y] \in R^2; |\frac{y-1}{x}| \leq 1\}$
- (f)  $\{[\frac{1}{n}, \frac{1}{m}] \in R^2; n, m \in R\}$
- (g)  $\{[x, y] \in R^2; \frac{4-4x^2-y^2}{4y} \geq 0\}$
- (h)  $\{[3 \cos t + \cos 3t, 3 \sin t - \sin 3t] \in R^2; t \in [0, 2\pi]\}$

**4.** Zkoumejte následující množinu  $M$  – je tato množina otevřená či uzavřená?

- (a)  $\forall k : M_k = \{[x, y] \in R^2; x^2 + y^2 < (1 + \frac{1}{k})^2\}$   
 Určete množinu  $M = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$ . Je tato množina otevřená či uzavřená?
- (b)  $\forall k : M_k = \{[x, y] \in R^2; x^2 + y^2 \leq (1 - \frac{1}{k})^2\}$   
 Určete množinu  $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ . Je tato množina otevřená či uzavřená?