## 10. Cvičení z MA III. (5.12.07)

**1.** Znovu k implicitně zadaným funkcím.

(a) Funkce $f(z) = x$ a $g(z) = y$ jsou definovány rovnicemi $x^2+y^2 = \frac{1}{2}z^2$ a $x+y+z = 2$ a podmínkami $f(2) = 1$, $g(2) = -1$. Určete $f'(2)$, $g'(2)$, $f''(2)$, $g''(2)$.

(b) Funkce $f(z) = x$ a $g(z) = y$ jsou definovány rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $x + y + z = 0$ a podmínkami $f(z_0) = x_0$, $g(z_0) = y_0$, kde $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$, $x_0 + y_0 + z_0 = 0$ a $x_0 - y_0 \neq 0$. Určete $f'(z_0)$, $g'(z_0)$.

(c) Najděte rovnici tečny a normály ke křivce zadané implicitně vztahem $\cos xy = x + 2y$ v bodě $(1, 0)$.

(d) Dokažte, že vztahy $u = x^2 - \sin yv$ a $v = 2x - e^{y+u}$ definují na okolí bodu $(1, -2 - e)$ hladké funkce $x(u, v)$ a $y(u, v)$ takové, že $x(1, -2 - e) = -1$ a $y(1, -2 - e) = 0$. Rozhodněte, zda tyto funkce $x(u, v)$ a $y(u, v)$ mají v bodě $(1, -2 - e)$ totální diferenciál (pokud ano, spočtěte jejich gradient v tomto bodě).

Ještě extrémy funkcí, tentokrát vázané.

**2.** Zjistěte lokální extrémy funkcí na zadaných množinách – využijte Lagrangeových multiplikátorů.

(a) $f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$ za podmínky $x^2 + 2x + y^2 = 0$

(b) $f(x, y) = y$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$

(c) $f(x, y) = y^2 - 2x + x^2$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x = y^2\}$

(d) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$ na množině
$M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 5\}$

(e) $f(x, y) = x^2 - y^2$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid y + e^{-x^2} - 1 = 0\}$

**3.** Najděte největší a nejmenší hodnoty funkcí – v jakých bodech je funkce nabývají? (Pokud funkce nenabývá extrémů, vyšetřujte sup a inf.)

(a) $f(x, y, z) = x$ na množině
$M = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^3 + y^3 + z^3 = 0\}$

(b) $f(x, y) = \sin x + \sin y$ na $M = \{(x, y) \in R^2;\ x^2 + y^2 < \frac{\pi^2}{4}\}$

**4.** A nějaké ‘slovní úlohy’:

(a) Jaká je vzdálenost parabol $p_1 : y = -x^2$ a $p_2 : y = (x-6)^2$?

(b) Tlustostěnná baňka válcovitého tvaru se stěnami i dnem silnými $4mm$ pojme $2l$ kapaliny s tím, že zůstanou ještě $2cm$ k okraji. Určete rozměry baňky, aby plocha styku kapaliny s baňkou byla co nejmenší.

(c) Jaký je nejekonomičtější tvar válcové konzervy s daným objemem?

(d) Město B je 10 km východně od města A a město C je 3 km jižně od B. Z A do C se má postavit dálnice. Cena při budování dálnice podél existující silnice z A do B je 4 miliony Kč na km, zatímco cena kdekoliv jinde je 5 milionů Kč na kilometr. Kudy by se měla vést dálnice, aby se minimalizovaly náklady?

**Řešení:**

**1a.** $f'(2) = 0,\ g'(2) = -1,\ f''(2) = -\frac{1}{4},\ g''(2) = \frac{1}{4}$
**1b.** $x'(z) = \frac{y(z)-z}{x(z)-y(z)},\ y'(z) = \frac{z-x(z)}{x(z)-y(z)}$

**1c.** tečna $x + 2y - 1 = 0$, normála $2x - y - 2 = 0$

**1d.**

**2a.** lokální=globální minimum v b. $(-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{1}{2})$, lokální=globální maximum v b. $(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\frac{1}{2})$
**2b.** $(0,0)$ není extrém; $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ ostrá lok. maximum vzhledem k $M$
**2c.** $(0,0)$ ostrá lok. maximum vzhl. k $M$; $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ ostrá lok. minima vzhl. k $M$
**2d.** $(3,2)$ ostré lok. minimum; $(2 - \frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}})$ ostré lok. maximum; podezřelý bod na hranici $(2 + \frac{3}{\sqrt{5}}, +\frac{6}{\sqrt{5}})$ není extrémem
**2e.** $(0,0)$ ostré lok. minimum

**3a.** podezřelé body $(0,0,0)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$; ostré lok. maximum $\frac{1}{\sqrt{2}}$ vzhl. k $M$ v b. $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; ostré lok. minimum $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ vzhl. k $M$ v b. $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$
**3b.** $\sup f(M) = 2\sin\frac{\pi}{\sqrt{8}}$; $\inf f(M) = 2 - \sin\frac{\pi}{\sqrt{8}}$

**4a.**
**4b.**
**4c.**
**4d.**