3. Cvičení z MA III. (17.10.07)

Jak se definuje otevřená, uzavřená množina? Co je vnitřní a vnější, co hraniční, limitní a izolovaný bod? Co je hranice, uzávěr, vnitřek množiny? Co je kompaktní množina?

Rozcvička:

(a) Ukažte, že koule $B(a,r) = \{x \in R^n; \rho(a,x) < r\}$ je otevřená množina.
Platí to pro diskrétní metriku?
Ukažte, že $\bar{B}(a,r) = \{x \in R^n; \rho(a,x) \leq r\}$ je uzavřená.

(b) Ukažte, že každá konečná podmnožina v (obecném) metrickém prostoru (M,ρ) je uzavřená.

(c) Jaké jsou otevřené množiny X v (obecném) metrickém prostoru (M,ρ), jehož každý bod je izolovaný (jako bod M)?

1. Zkoumejte následující množiny (otevřenost, uzavřenost, vnitřek, hranice, uzávěr, omezenost, kompaktost) :

(a) Mějme metrický prostor (N,ρ'), kde $N = (0,1) \cup (2,3\rangle$, ρ' metrika indukovaná z eukleid. prostoru R.
Zkoumejte množiny $X_1 = (0,1)$, $X_2 = (2,3)$ v (N,ρ').

V následujících příkladech uvažujeme množiny X v eukleid. prostoru (R^n, ρ_2):

(b) $\{[x,y] \in R^2;\ y > x^2,\ x^2+y^2 < 2\}$

(c) $\{[x,y] \in R^2;\ y \geq x^2\} \cup \{[0,-1]\}$

(d) $\{[x,y] \in R^2;\ 1 \leq x < 2,\ 1 \leq y < 2\}$

(e) $\{[x,y] \in R^2;\ |\frac{y-1}{x}| \leq 1\}$

(f) $\{[\frac{1}{n}, \frac{1}{m}] \in R^2;\ n,m \in N\}$

(g) $\{[x,y] \in R^2;\ \frac{4-4x^2-y^2}{4y} \geq 0\}$

(h) $\{[3\cos t + \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t] \in R^2;\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$

(i) $\{[x,y,z] \in R^3;\ 1 < x^3+y^3+z^3 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$

2. Rozhodněte, zda jsou následující množity omezené:

(a) $\{[x,y] \in R^3;\ 2 \leq xyz \leq 4\}$

(b) $\{[x,y] \in R^3;\ x+y+z = 5\ ,\ xy+yz+xz = 8\}$

(c) $\{[x,y] \in R^2;\ x^3+y^3-2xy=0\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\}$
tip: příslušný kvadrant lze vyjádřit jako $\{[r\cdot\cos\alpha, r\cdot\sin\alpha];\ r \geq 0,\ \alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle\}$

3. Zkoumejte následující množiny M – jsou tyto množiny otevřené či uzavřené?

(a) $\forall k \in N:\ M_k = \{[x,y] \in R^2;\ x^2+y^2 < (1+\frac{1}{k})^2\}$
Určete množinu $M = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$. Je tato množina otevřená či uzavřená?

(b) $\forall k \in N:\ M_k = \{[x,y] \in R^2;\ x^2+y^2 \leq (1-\frac{1}{k})^2\}\}$
Určete množinu $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. Je tato množina otevřená či uzavřená?

4. Zjistěte, čemu se rovná uzávěr následujících množin X:

(a) Q v R s metrikou indukovanou z obvyklé metriky na R

(b) N v R s metrikou indukovanou z obvyklé metriky na R

(c) $\{f \in C(\langle 0,1\rangle); f$ po částech lineární$\}$ v $C(\langle 0,1\rangle)$ se supremovou metrikou

(d) $\{f \in C(\langle 0,1\rangle); \forall x,\ y \in \langle 0,1\rangle : |f(x)-f(y)| \leq |x-y|\}$ v $C(\langle 0,1\rangle)$ se supremovou metrikou

Dú. Určete vzdálenost bodu $[-5,-1]$ od množin $M_1 = \{[x,y] \in R^2;\ y = x^2\}$ a $M_2 = \{[x,y] \in R^2;\ y > x^2\}$.
(vzdálenost: $\rho(a,M) := \inf\{\rho(a,x);\ x \in M\}$ pro $a \in R^n$, $M \subset R^n$)

Řešení:

c. Otevřené jsou všechny podmnožiny M.

1a. X_1 otevřená i uzavřená, Int $X_1 = X_1$, vnější body Ext $X_1 = \langle 2,3\rangle$, hranice Hr $X_1 = \emptyset$; X_2 otevřená, ne uzavřená, Int $X_2 = X_2$, vnější body Ext $X_2 = (0,1)$, hranice Hr $X_2 = \{3\}$

1b. X otevřená, Hr $X = \{[x,y]\ ;\ x^2 = y\ ,\ -1 \le x \le 1\} \cup \{[x,y]\ ;\ x^2 + y^2 = 2\ ,\ -1 \le x \le 1\}$, uzávěr $\bar{X} = \{[x,y] \in R^2;\ y \ge x^2,\ x^2 + y^2 \le 2\}$, omezená

1c. X uzavřená, Hr $X = \{[x,y]\ ;\ x^2 = y\ ,\ x \in R\} \cup \{[-1,0]\}$, $\bar{X} = X$, Int $X = \{[x,y]\ ;\ x^2 < y\ ,\ x \in R\}$, neomezená

1d. X není ot., není uz., Hr $X = \{[x,1]\ ;\ 1 \le x \le 2\} \cup \{[x,2]\ ;\ 1 \le x \le 2\} \cup \{[1,y]\ ;\ 1 \le y \le 2\} \cup \{[2,y]\ ;\ 1 \le y \le 2\}$, $\bar{X} = \{[x,y] \in R^2;\ 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$, Int $X = \{[x,y] \in R^2;\ 1 < x < 2,\ 1 < y < 2\}$, omezená

1e. X není ot., není uz., Hr $X = \{[x,y]\ ;\ y = -x + 1\} \cup \{[x,y]\ ;\ y = x + 1\}$, $\bar{X} = X \cup \{[0,1]\}$, Int $X = \{[x,y] \in R^2;\ |\frac{y-1}{x}| < 1\}$, není omezená

1f. X není ot., není uz., Hr $X = X \cup \{[0, \frac{1}{m}]\} \cup \{[\frac{1}{n}, 0]\} \cup \{[0,0]\}$, $\bar{X} =$ Hr X, Int $X = \emptyset$, omezená

1g. X není ot., není uz., Hr $X = \{[x,y] \in R^2;\ \frac{4-4x^2-y^2}{4y} = 0 \cup \{[x,0]\}$, $\bar{X} = X \cup \{[x,0]\}$, Int $X = \{[x,y] \in R^2;\ \frac{4-4x^2-y^2}{4y} > 0\}$, není omezená

1h. X uzavřená (uz. křivka), Hr $X = X = \bar{X}$, Int $X = \emptyset$, omezená

1i. X není ot., není uz., Hr X ... místo některé z nerovností platí rovnost, $\bar{X} = \{[x,y,z] \in R^3;\ 1 \le x^3 + y^3 + z^3 \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$, Int $X = \{[x,y,z] \in R^3;\ 1 < x^3 + y^3 + z^3 < 2,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, omezená

2a. X není omezená, např. $[n, \frac{1}{n}, 2]$, **2b.** X omezená, $X \subset B([0,0,0], \sqrt{3})$, **2c.** X omezená, obraz kompakt. intervalu při spojitém zobrazení

3a. M uzavřená, **3b.** M otevřená

4a. $\bar{Q} = R$, **4b.** $\bar{N} = N$, **4c.** $\bar{X} = C(\langle 0,1\rangle)$ (Weierstrass), **4d.** $\bar{X} = X$