6. Cvičení z MA III. (7.11.07)

Co to je (totální) diferenciál funkce $f : G \to R$ ($G \subset R^n$ otevřená) v bodě $a \in G$ (značíme $Df(a)$)?
Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi?

1. Ověřte podle definice, že lineární funkce $L(h_1, h_2) = 2(h_1 + h_2)$ je diferenciálem funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $(1, 1)$.

2. Dodefinujte funkci $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ na R^2 tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.

3. Vyšetřete, zda lze funkci $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \log(1+xy)$ dodefinovat v nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla diferenciál.

Co to je směrová derivace? Jak souvisí totální diferenciál s derivacemi ve směru?

4. Vypočtěte derivace následujících funkcí f v zadaných směrech h v zadaných bodech a:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ve směru $h = (-1, 1, 1)$ v bodě $a = (1, 2, -1)$
(Jak byste postupovali, pokud byste chtěli využít pouze definice směrové derivace?)

(b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} xy$ ve směru $h = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ v bodě $a = (1, 1)$

(c) $f(x, y) = e^{x-y^2}$ ve směrech $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$ v bodě $(0, 0)$

(d) $f(x, y, z) = \sin(xyz)$ ve směru $(2, 1, 1)$ v bodě $(1, 1, 0)$

(e) Určete směrové derivace funkce $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$ v bodě $(0, 0, 0)$.
Rozhodněte, zda v tomto bodě existuje diferenciál.

Konvence (v technických textech):
Nechť $h = (h_1, \dots h_n) \in R^n$ a x_i jsou projekce na i-tou souřadnici (tj. $x_i(h) = h_i$). Projekce jsou lineární (proč?), proto diferenciál dx_i je roven x_i (zde píšeme dx_i místo Dx_i v j. bodě). Diferenciál je též projekcí na i-tou souřadnici: $dx_i(h) = x_i(h) = h_i$. Tedy

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1(h) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n(h)$$

Píšeme tedy:

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

5. Vypočtěte totální diferenciál následujících funkcí f:

(a) $f(x,y)=\frac{x}{y}$ (b) $f(x,y)=e^{xy}$ (c) $f(x,y,z)=xy+yz+xz$

6. Ukažte, že pro malá x a y platí:

(a) $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y$ (b) $(1+x)^m(1+y)^n\approx 1+mx+ny$

(c) $\ln(1+x)\ln(1+y)\approx xy$

Řešení:

2. $f(0,0):=0$

3. $f(0,0):=0$

4a. $Df(1,2,-1)(-1,1,1)=\langle\nabla f(a),h\rangle=2.(-1)+4.1+2.1=4$

4b. $Df(1,1)(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=\langle\nabla f(a),h\rangle=\frac{1}{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}})+\frac{1}{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

4c. $Df(0,0)(1,0)=e^1=1,\ Df(0,0)(-1,0)=-e^1=-1,\ Df(0,0)(1,1)=e^0=1$

4d. $Df(1,1,0)(2,1,1)=0.2+0.1+1.1=1$

4e. $D_hf(0,0,0)=\sqrt[3]{h_1^3+h_2^3+h_3^3}$, nejde o totální diferenciál (není lineární)

5a. $Df(x,y):h\mapsto(\frac{1}{y}h_1-\frac{x}{y^2}h_2)$ (tj. $df=\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy$)

5b. $Df(x,y):h\mapsto(ye^{xy}h_1+xe^{xy}h_2)$ (tj. $df=ye^{xy}dx+xe^{xy}dy$)

5c. $Df(x,y,z):h\mapsto((y+z)h_1+(x+z)h_2+(x+y)h_3)$

(tj. $df=(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$)