Vzorový zápočtový test (2007/8)

1. Určete globální extrémy zadané funkce f na množině M:

$$f(x,y,z) = xyz$$

$$M = \{[x,y,z] \in R^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \&\ x + y + z = 0\}$$

[5 bodů]

2. Je dána funkce

$$F(x,y,z) = x \sin z + y \cos z - e^z$$

Ukažte, že existuje funkce $z = z(x,y)$, která je dána implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 0$ a podmínkou $z(0,1) = 0$.
Určete $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)$.
[3 body]

3. Buď dána funkce

$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{y+1} - x\right)$$

a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
b) Vypočítejte $\nabla f(0,0)$. Ukažte, že funkce f je v bodě $[0,0]$ diferencovatelná a určete v tomto bodě totální diferenciál.
c) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $[0,0,0]$.
d) Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace $f(-0,04; 0,02)$.
[3 body]

4. Řešte diferenciální rovnici – najděte její maximální řešení:

$$y(x) \cdot y'(x) = \frac{1-2x}{y(x)}$$

[5 bodů]

Řešení:

1. body maxima: $(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}),\ (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}),\ (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$;
body minima: $(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}),\ (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}),\ (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$

2. $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 0$; $\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 1$

3. b) $\nabla f(0,0) = (-1, \frac{1}{2})$; $Df(0,0)(x,y) = -x + \frac{1}{2}y$
c) rovnice tečny $0 = -x + \frac{1}{2}y - z$; normála $(-1, \frac{1}{2}, -1)$
d) $f(-0,04; 0,02) = -1 \cdot (-0,04) + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 0,05$

4. pro $c < -\frac{1}{4}$: $y_c = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)},\ x \in R$;
pro $c = -\frac{1}{4}$: $y_c = -\sqrt[3]{3(x - \frac{1}{2})^2},\ x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ nebo $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$;
pro $c > -\frac{1}{4}$: $y_c = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)},\ x \in (-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$
nebo $x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$
nebo $x \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \infty)$;