8. Cvičení z MA III. (21.11.07)

1. Vyšetřete extrémy následujících funkcí na parametricky zadané množině – 'ploše' (z minulé hodiny).

Platí: $f : M \to R$, $M \subset R^n$ 'plocha', $\varphi : U \subset R^m \to V \subset M$ homeomorfismus ot. U na ot. V v M. Pak funkce $f \circ \varphi$ má v b. $a \in U$ lok. extrém j. druhu, právě když má f extrém téhož druhu v b. $b = \varphi(a)$ vzhledem k M.

(a) $f(x,y) = xy^2$ na $M = \{[x,y] \in R^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$
(užijte parametrizaci polárními souřadnicemi)

(b) $f(x,y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na $M = \{[x,y] \in R^2; x^2 + 2x + y^2 = 0\}$

(c) $f(x,y) = x + 2y + \frac{3}{4}x^2 + xy + 2y^2$ na $M = \{[x,y];\ y^2 - 2 \le x \le -y^2 + 2\}$
(pouze globální)

Jaký je diferenciál součtu, součinu a podílu dvou zobrazení?
Kdy existuje a jak se vypočítá diferenciál složeného zobrazení?

2. Přímá aplikace:

(a) Nechť funkce f má spojitou derivaci na R. Definujme funkci $g(x,y) = f(x^2 + y^2)$ pro $(x,y) \in R$. Vyjářete parciální derivace 1. řádu funkce g pomocí funkce f.

(b) Nechť $f = f(u,v)$ je třídy C^2 na okolí bodu $(a+b, a-b)$ a položme $g(x,y) = f(x+y, x-y)$. Vyjádřete $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a,b)$ pomocí derivací funkce f.
Značení: $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial g}{\partial x})(a,b)$

3. Nepřímá aplikace:

(a) Nechť $u = u(x,y)$ je funkce třídy C^1 na R^2, pro kterou $u(x,x^2) = 1$ a $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2) = x$ pro každé $x \in R$. Spočtěte $\frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2)$.

(b) Nechť f má totální diferenciál v bodě $(1,0)$ a nechť funkce g je dána předpisem $g(u,v) = f(e^u \cos v, e^u \sin v)$. Nechť $\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 7$, $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = -1$. Spočtěte parciální derivace funkce f v bodě $(1,0)$.

4. Změna souřadnic – pro řešení diferenciálních rovnic:

(a) Najděte všechna řešení třídy C^1 parciální diferenciální rovnice

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy$$

na polorovině $\{(x,y); x > 0\}$ pomocí substituce $x = u,\ y = uv$.

(b) Řešte vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

kde $a > 0$, $u = u(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in R$ (nekonečná struna), s počátečními podmínkami

$$u(0, x) = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x)$$

pomocí transformace proměnných $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.

Řešení:

1a. ostré lok. max. v b. $(-1, 0), (\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$, ostré lok. min. v b. $(1, 0), (-\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$
1b. lokální=globální minimum v b. $(-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{1}{2})$, lokální=globální maximum v b. $(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\frac{1}{2})$
1c. vnitřek: podezřelý bod $(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5})$, hranice: podezřelé body $(0, \pm\sqrt{2}), (-2, 0), (-1, -1)$, $(1, 1), (\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}})$; glob. minimum v b. $(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5})$, glob. maximum v b. $(0, \sqrt{2})$

2a. $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f'(x^2 + y^2) \cdot 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f'(x^2 + y^2) \cdot 2y$
2b. $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(x + y, x - y) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y, x - y) \cdot 1$,
$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x + y, x - y) \cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x + y, x - y) \cdot (-1)$

3a. $\frac{\partial u}{\partial y}(x, x^2) = -\frac{1}{2}$ pro $\forall x \in R$
3b. $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 7$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = -1$