12. Cvičení z MA III. (19.12.07)

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x),$$

kde $a(x)$ a $b(x)$ jsou funkce definované a spojité na nějakém intervalu I;
je-li $b(x) \equiv 0$ ... homogenní rovnice

1. Řešte následující rovnice metodou variance konstant – najděte obecné řešení a, jsou-li zadány poč. podmínky, též řešení vyhovující těmto podmínkám.

(a) $y'(x) + y(x) = x \cdot e^x$

(b) $y'(x) = -\frac{x}{1+x^2} \cdot (1 + 2y(x))$,
pro poč. podm. (i) $y(0) = 0$, (ii) $y(1) = \frac{1}{2}$, (iii) $y(-1) = -1$

(c) $y'(x) - \frac{y(x)}{2(x+1)} = e^x \cdot \sqrt{1+x}$, pro poč. podm. $y(0) = -1$

(d) $y'(x) + \frac{1-2x}{x^2} \cdot y(x) = 1$

(e) $y'(x) + 2xy(x) = xe^{-x^2}$, pro poč. podm. $y(0) = -3$

(f) $y'(x) - 4xy(x) = x^7$

(g) $y'(x) + xy(x) = 1$

2. Řešte následující úlohy na diferenciální rovnice.

(a) Najděte všechna lichá maximální řešení úlohy
$y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}$, poč. podmínka $y(2) = 1$

(b) Najděte všechna neomezená maximální řešení úlohy
$y'(x) = \frac{y(x)^2}{1+x^2}$

(c) Najděte všechna sudá maximální řešení úlohy
$xy'(x) = ky(x)$, poč. podmínka $y(1) = 1, k \in N$

(d) Najděte všechna maximální řešení úlohy
$(\cos^2 x)y'(x) = \cos^2 y(x)$, poč. podmínka $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

(e) Najděte všechna maximální řešení úlohy
$xy'(x) + y(x) = \sin x$

3. Další úlohy převoditelné na separaci proměnných.

(a) tip: pro rovnice tvaru $y' = f(\frac{y}{x})$ ... substituce $z = \frac{y}{x}$

$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

(b) tip: pro rovnice tvaru $y' = f(ax+by)$ ... substituce $z = ax + by$
$y' = \sin(y - x)$

Řešení:

1a. $y_{ob}(x) = (\frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^x + de^{-x},\ x \in R,\ d \in R$

1b. $y_{ob}(x) = -\frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2} + \frac{d}{1+x^2},\ x \in R,\ d \in R$

(i) $y_0(x) = -\frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}$, (ii) $y_1(x) = -\frac{1}{2}(\frac{x^2-3}{1+x^2})$, (iii) $y_{-1}(x) = -\frac{1}{2}(\frac{x^2+3}{1+x^2})$

1c. $y_{ob}(x) = \sqrt{x+1}(e^x + d),\ d \in R,\ x \in (-1, \infty)$

$y_0(x) = \sqrt{x+1}(e^x - 2),\ x \in (-1, \infty)$

1d. $y_{ob}(x) = x^2 + dx^2 e^{\frac{1}{x}},\ d \in R,\ x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$

1e. $y_{ob}(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x^2} + de^{-x^2},\ d \in R,\ x \in R,$ d=-3

1f. $y_{ob}(x) = -\frac{1}{32}(8x^6 + 12x^4 + 12x^2 + 6) + de^{2x^2},\ d \in R,\ x \in R$

1g. $y_{ob}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \int_{x_0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{dt} + de^{-\frac{x^2}{2}},\ d \in R,\ x \in R,\ x_0 \in R$

2a. jediné max. liché řešení pro poč. podm.:

$y(x) = (x-1)^2$ pro $x \in (1, \infty)$, $y(x) = 0$ pro $x \in [-1, 1]$,

$y(x) = -(x-1)^2$ pro $x \in (-\infty, 1)$

2b. pro $c \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ... jen omezená řešení

pro $c = \pm\frac{\pi}{2}$ ... $y(x) = -\frac{1}{\mathrm{arctg}\ x + c}$ ... neomez. max. $x \in R$

pro $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ... $y(x) = -\frac{1}{\mathrm{arctg}\ x + c}$ ... neomez. max na $x \in (-\infty, \mathrm{tg}\ (-c))$,

nebo $x \in (\mathrm{tg}\ (-c), \infty)$

2c. max. sudé řeš. $y(x) = |x|^k,\ k > 1$ (pro $k = 1$ max. sudé řeš. neex.)

2d. obecné max. řeš. $y_{n,c_k}(x)$, kde $n \in Z,\ c_k \in R,\ k \in Z$:

$y_{n,c_k}(x) = n\pi + k\pi + \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\ x + c_k)$ na intervalu $I_k = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$,

$y_{n,c_k}(\frac{\pi}{2} + k\pi) = n\pi + k\pi + \frac{\pi}{2}$

řeš. pro poč. podm ... $n = 0$

2e. $y(x) = \frac{c - \cos x}{x},\ c \in R,\ x \in (-\infty, 0)$, nebo $x \in (0, \infty)$

3a. $y_{1,2}(x) = x\sqrt{2(\ln|x| + d)},\ d \in R,\ x \in (-\infty, -e^{-d})$ nebo $x \in (e^{-d}, \infty)$

$y_{3,4}(x) = -x\sqrt{2(\ln|x| + d)},\ d \in R,\ x \in (-\infty, -e^{-d})$ nebo $x \in (e^{-d}, \infty)$

3b. $y_k(x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\ \mathrm{arccotg}\ (x + d) + 2k\pi,\ k \in Z,\ d \in R,\ x \in R$

$\bar{y}_k(x) = x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z,\ x \in R$