

9. Cvičení z MA III. (28.11.07)

Ještě derivace složených funkcí.

1. rozcvička: Derivujte podle všech proměnných.

- (a) funkci $t \rightarrow u$, kde $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$
- (b) funkci $t \rightarrow z$, kde $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$
- (c) funkci $(r, \varphi) \rightarrow z$, kde $z = x^2y - xy^2$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$
- (d) Nechť funkce $(u, v, w) \rightarrow f(u, v, w)$ má spoj. parc. der. 2. řádu na R^3 . Spočítejte parc. der. 2. řádu funkce $p(x, y, z) = f(x, xy, xyz)$.
- (e) Spočítejte hodnoty parc. der. 1. a 2. řádu fce $F(x, y) = g(xy, \frac{x}{y})$ v bodě $A = (3, 2)$.

Věta o implicitních funkcích.

2. Je zadaná funkce $F(x, y)$ a dvě čísla x_0, y_0 taková, že $F(x_0, y_0) = 0$. Dokažte, že v nějakém okolí U bodu (x_0, y_0) existuje funkce $f = f(x)$ splňující podmínky $f(x_0) = y_0$ a $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Určete $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.

- (a) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4$, $(x_0, y_0) = (6, 2)$
- (b) $F(x, y) = x \sin y - \cos y + \cos 2y$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$
- (c) $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$

3. Funkce $f = f(x, y)$ je dána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ a podmínkou $f(x_0, y_0) = z_0$. Určete derivace f podle všech proměnných (a vypočítejte pro zadané body).

- (a) $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 2z + 3$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, -2)$
- (b) $F(x, y, z) = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$
- (c) $F(x, y, z) = e^z + x^2y + z + 5$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, -6, 0)$

4. Ukažte, že zadanou množinu M lze na okolí daného bodu a popsat jako graf funkce f . Spočítejte její (parc.) derivace prvního a druhého řádu v příslušném bodu.

- (a) $M = \{(x, y) \in R^2; (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$ v okolí b. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
- (b) $M = \{(x, y) \in R^2; \log \sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x}\}$ v okolí b. $(1, 0)$, kde $f(1) = 0$
- (c) $M = \{(x, y, z) \in R^3; x \sin z + y \cos z - e^z = 0\}$ v okolí b. $(2, 1, 0)$,
kde $f(2, 1) = 0$. Napište rovnici její tečny v b. $(2, 1, 0)$.

Řešení:

1a. 1b. 1c.

1d. např. $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v} + yz \frac{\partial f}{\partial w}$; např. $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = x^2 y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}$

1e. např. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(3, 2) = 4 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(6, \frac{3}{2}) + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(6, \frac{3}{2}) + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(6, \frac{3}{2})$, kde $g = g(u, v)$

2a. $f'(6) = \frac{4}{3}$, $f''(6) = \frac{17}{27}(?)$

2b. $f'(0) = f''(0) = 0$

2c. $f'(0) = 0$, $f''(0) = f'''(0) = -\frac{2}{3}$

3a. $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2) = -\frac{1}{5}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2) = -\frac{3}{5}$

3b. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) = 0$

3c. $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -6) = 6$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -6) = -\frac{1}{2}$

4a. $f'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$, $f''(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{23}{4}(?)$

4b. $f'(1) = 1$, $f''(1) = 2$

4c. $T(x, y) = 0 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 1) = 1 - y$