

2. Cvičení z MA III. (10.10.07)

1. Prostor funkcí $C\langle a, b \rangle$ (spoj. fce na uz. intervalu) ... ukažte, že následující předpisy mají smysl a definují metriku:

$$(a) \quad f, g \in C\langle a, b \rangle : \quad \rho_{\max}(f, g) = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f(x) - g(x)|$$

$$(b) \quad f, g \in C\langle a, b \rangle : \quad \rho_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

$$(c) \quad f, g \in C\langle a, b \rangle : \quad \rho_2(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx}$$

(Tip: Hölderova ner.: $\int_a^b |fg| \, dx \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f|^p \, dx} \cdot \sqrt[q]{\int_a^b |g|^q \, dx}$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\text{Zobecnění: } \rho_p(f, g) = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx}$$

- (d) Ukažte, že konvergence v metr. prostoru $(C\langle a, b \rangle, \rho_{\max})$ je stejnoměrná.
- (e) Jak vypadá jednotková koule v metr. prostoru $(C\langle a, b \rangle, \rho_{\max})$?
- (f) Rozmyslete si, že metriky ρ_{\max} a ρ_1 nejsou ekvivalentní!

2. Prostor funkcí $R\langle a, b \rangle$ (riemannovsky integrovatelné fce):

$$(a) \quad f, g \in R\langle a, b \rangle : \quad \rho_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx \quad \text{není metrika} - \text{ proč?}$$

(b) Jak lze upravit, abychom dostali metrický prostor?

3. Prostor posloupností $\{x_n\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in R$... ukažte, že následující předpisy mají smysl a definují metriku:

$$(a) \quad \text{prostor } l_1 \dots \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \dots \quad x, y \in l_1 : \quad \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$$

$$(b) \quad \text{prostor } l_2 \dots \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \dots \quad x, y \in l_2 : \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2}$$

(Tip: Minkowského ner.: $\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_i^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n b_i^p}$
pro $a_i, b_i \geq 0, p \geq 1$)

Zobecnění:

$$\text{prostor } l_p \dots \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \dots \quad x, y \in l_p : \quad \rho_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p}$$

$$(c) \quad \text{prostor } l_{\infty} \dots \{x_n\}_{i=1}^{\infty} \text{ omez. posl. } \dots \\ x, y \in l_{\infty} : \quad \rho_{\infty}(x, y) = \max_{i=1, \dots, \infty} |x_i - y_i|$$

5. Méně rozumné metriky

- (a) $P \neq \emptyset \dots x, y \in P : \rho(x, y) = 1$ pro $x \neq y$, $\rho(x, y) = 0$ pro $x = y$
Jak vypadá jednotková koule? Jak vypadá koule o poloměru r , $r \geq 1$?

- (b) X ... prostor všech omezených posloupností reálných čísel ...

$$x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in X : \quad \rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

Ukažte, že ρ je metrika na X .

6. Metriky indukované normou.

- (a) Co je to normovaný lineární prostor $(M, \|\cdot\|)$ (nad R) ?

- (b) $x, y \in M : \rho(x, y) := \|x - y\|$
Ukažte, že ρ je metrika na M .

7. Metriky a skalární součin.

- (a) Co je to lineární prostor se skalárním součinem $(M, (x, y))$ (nad R) ?

- (b) Pro $x \in M$ definujme $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$. (Ukažte, že je to norma.)

- (c) Tedy na M lze definovat metriku $\rho := \sqrt{(x - y, x - y)}$, $\forall x, y \in M$.
Ukažte, že je to opravdu metrika.