10. Cvičení z MA I. (7.12.06)

1. Další příklady na limity:

(a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$ $[-3]$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ $[\frac{1}{2}]$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ $[e^3]$ (d) $\lim_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\mathrm{cotg}^2 x}$ $[e]$

(e) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\mathrm{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ $[1]$ (f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$ $[\frac{1}{5}]$

(g) $\lim_{x\to 0} x\cdot\sqrt{|\cos\frac{1}{x}|}$ $[0]$ (h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$ $[\frac{3}{2}]$

(i) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{(x-\frac{\pi}{4})^2}$

2. Najděte $a, b \in R$ tak, aby platilo:

(a) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$ $[a=-1, b=\frac{1}{2}]$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$ $[a=1, b=-1]$

3. Ještě další limity:

(a) $\lim_{x\to y} \frac{x^n-y^n}{x-y}$ $n\in N$ $[ny^{n-1}]$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{e^{ax}}$ $[0]$

(c) $\lim_{x\to 0} \left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$ $[e^2]$ (d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ $[b-a]$

(e) $\lim_{x\to 0} x^x$ $[0]$ (f) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ $[e^{-1}]$

(g) $\lim_{x\to 0} (\ln\frac{1}{x})^x$ $[1]$ (h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$ $[\sqrt{2}]$

(i) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}\ x)^{\mathrm{tg}\ 2x}$ $[e^{-1}]$ (j) $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+2^x)\cdot\ln(1+\frac{3}{x})$ $[3\ln 2]$

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}$ $[1]$

4. Vyšetřete obor spojitosti funkce - lze ji rozšířit spojitě na celou reálnou osu?

(a) $f(x)=\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^2+3x+2}$ [ano, $g(x)=x+3$]

(b) $f(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$ [ano v b. -2, ne v b. 0]