

6. Cvičení z MA I. (9.11.06)

1. Spočítejte limity pro rekurentně zadané posloupnosti:

- (a) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$
 (b) $a_1 = t > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$
 (c) $a_1 = t > 0$, $a_{n+1} = (a_n + \frac{1}{a_n})$
 (d) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$

2. Dokažte, že následující nekonečný součin má konečnou nenulovou hodnotu (z minulé hodiny):

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots$$

3. Spočítejte (z minulé hodiny):

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Co je to řada, jak se definuje její součet, jaké metody pro zkoumání řad znáte?

4. Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně, případně divergují:¹

- (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{\sqrt{n}}$ [D] (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \cos n}{n + \ln n}$ [D]
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}$ [KA] (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ [KA pro všechna x]
 (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2 + 3n}$ [D] (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$ [KA] (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ [D]
 (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$ [KA] (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n - \ln n}$ [KN]
 (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ [D]
 (k) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}$ [KA pro $x \in (0, 1/e)$, D pro $x > 1/e$]

5. Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně, případně divergují:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n^2 \pi (\sqrt{n+11} - \sqrt{n+2})$
 (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ [KN]
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ [KA pro $|x| < 1$, D pro $|x| > 1$, KN pro $|x| = 1$]
 (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{2n^4 + 3}$ [KA]
 (e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}$ [KA pro $\alpha > 1/2$, jinak D]
 (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$ [KA pro $|x| < 1$, D pro $|x| \geq 1$]

¹ D ... diverguje, KA ... konverguje absolutně, KN ... konverguje neabsolutně