2. Cvičení z MA I. (12.10.06)

M. Lopatková

Jak probíhá důkaz matematickou indukcí?

1. Dokažte, že pro všechna přirozená n platí:

(i) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n (n + 1)$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1/6\, n (n + 1)(2n + 1)$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{1}{2} n (n + 1))^2$ (iv) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$

(v) $\sum_{k=1}^{n} 1 / \sqrt{k} > \sqrt{n}$, $n \geq 2$ (vi) Vypočítejte: $\sum_{k=1}^{n} x^k$

2. Dokažte pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená n a reálná $x > -1$ platí tzv. Bernoulliho nerovnost:

$(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (návod … krok $n \to n+2$)

3. Dokažte tzv. de Morganova pravidla:

(i) $A \setminus \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$

(ii) $A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$

4. Dokažte pro všechna přirozená n:

(i) $(2n)! < 2^{2n} (n!)^2$ (ii) $n^2 \leq 2^n$

5. Dokažte pro všechna přirozená n, $0 \leq x_k \leq \pi$:

$$|\sin (\sum_{k=1}^{n} x_k) | \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$$

6. Dokažte pro všechna přirozená n, přitom e je základ přirozeného logaritmu a platí $(1+ 1/n)^n \leq e$:

$$(n /e)^n \leq n! \leq ((n + 1) / 2)^n$$

(Nápověda: pro horní odhad lze užít AG nerovnost)

7*. Dokažte AG nerovnost pro všechna $x_i \in \mathbb{R}$, :

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + \ldots + x_n)$$

(návod: MI s krokem $n \to 2n$, potom zpětnou indukcí $n \to n - 1$)