

3. Cvičení z MA I. (19.10.06)

Co je to supremum, infimum, maximum, minimum? Příklad množiny, která má supremum, ale ne maximum; příklad množiny bez suprema.

1. Najděte suprema a infima následujících množin (pokud existují); existují pro ně maxima a minima?

(a) $A_1 = \{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ (b) $A_2 = \{\frac{n+(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}\}$

(c) $A_3 = \{n^{(-1)^n}; n \in \mathbb{N}\}$ (d) $A_4 = \{q < \sqrt{3}; q \in \mathbb{Q}\}$

(e) $A_5 = \{\sin x \cos x; x \in \mathbb{R}\}$

Co je to posloupnost, monotónní posloupnost? Jaká je definice limity pro posloupnosti; nevlastní limita?

2. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti monotónní.

(a) $\{2n + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\{(n+1)/(\sqrt{n^2+2n-2})\}_{n=1}^{\infty}$

3. Spočítejte přímo podle definice limitu posloupnosti:?

(a) $\{1/(1+n^2)\}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\{(n+1)/(n+2)\}_{n=1}^{\infty}$

4. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(-1)^n$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n!}$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5n}{-n^2+4n}$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5^n+10^n}{-2^{n+1}+5^{n+1}+10^{n+1}}$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2(n\pi/4)$ (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n^2$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$ (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$

(k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$

(m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+4n+n \sin n}{n \cos 3n+(2n+\sin n)^2}$ (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt[2]{n^3+1}}$

5. Spočítejte limity následujících součtů:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{n+2} - \frac{n}{2}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n [xk]}{n^2}$ (parametr $x \in \mathbb{R}$, $[]$... celá část)

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sqrt[3]{8n^6-n}}$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{n^4}$

6. Dů: Určete, čemu se rovnají limity:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n, \quad q \in \mathbb{R}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot q^n$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot q^n, \quad |q| < 1$