

4. Cvičení z MA I. (26.10.06)

1. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují) – příklady z minulé hodiny:

- (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2(n\pi/4)$ (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n^2$
 (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$ (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$
 (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$
 (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+4n+n \sin n}{n \cos 3n+(2n+\sin n)^2}$ (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt[2]{n^3+1}}$

2. Spočítejte limity následujících součtů – příklady z minulé hodiny:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{n+2} - \frac{n}{2}$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n [xk]}{n^{\frac{1}{2}}}$ (parametr $x \in R$, $[]$... celá část)
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sqrt[3]{8n^6-n}}$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{n^4}$

3. Určete, čemu se rovnají limity (Dů):

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n, q \in R$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot q^n$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot q^n, k \in N$

4. (Dů) Určete, čemu se rovnají limity:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!}, q \in R$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!}, k \in N$

5. Spočítejte limity:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} \cdot (2^n-n)}{(n^2-n+1)(n!+\ln n)}$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n!}{n+1}$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+2n^n+n!}{(n+1)^4+\sin n+(3n)!}$

6. Spočítejte limity:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}, a, b, c \in R^+$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}$

7. Určete limity následujících výrazů:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}, a \in R, a \geq 0$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$

8.* (Dů) Dokažte, že existuje limita posloupnosti $\{a_n\}$, kde $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.
 (Návod: (i) Ukažte, že $\{a_n\}$ je neklesající (AG nerovnost pro $n+1$ členů);
 (ii) ukažte, že $\{b_n\}$ je nerostoucí, kde $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$, nebo
 (ii)' ukažte, že $\{a_n\}$ je omezená shora (využijte $\{c_n\}$, kde $c_n = (1 + 1/nk)^{-n}$)
 Existují následující limity? Čemu se rovnají?

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n, x \in R$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2})^n$