

## 10. Cvičení z MA II. (24.4.07)

Co je to mocninná řada? Jak zjistíte její poloměr konvergence  $R$ ?

Jaké věty platí pro mocninné řady (lokálně stejnoměrná konvergence na  $(-R, R) \Rightarrow$  možnost záměny  $\lim, \sum$ ; integrování a derivace člen po členu;  $\lim_{x \rightarrow R^-}$ )

**1.** Určete poloměr konvergence, vyšetřete konvergenci v krajních bodech intervalu konvergence.

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$  (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n \cdot 2^n}$  (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n(n+2)}$   
(e)  $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)x^n$  (f)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n \cdot x^n}{\sqrt{2^n}}$  (g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$  (h)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{(n^2)!}$   
(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(n+1) \log(n+1)}$  (j)  $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \cdot x^{2n}$  (k)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n \cdot \sqrt{n}}$

**2.** Na intervalu konvergence sečtete mocninné řady:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$  (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}$  (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}x^{n-1}$   
(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$  (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$  (g)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2nx^{2n-1}$   
(h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$  (j)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$   
(k)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^{n+1}}$  (l)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$  (m)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$  (n)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

**Řešení:**

**1a.**  $(-3, 3)$    **1b.**  $[-1, 1)$ , pro  $x = -1$  neabs.   **1c.**  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , pro  $x = \pm\sqrt{2}$  neabs.  
**1d.**  $[-3, -1]$ , pro  $x = -3, -1$  abs.   **1e.**  $\{0\}$    **1f.**  $(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$    **1g.**  $[-2, 8)$ , pro  $x = -2$  neabs.   **1h.**  $R$    **1i.**  $(0, 2)$    **1j.**  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$    **1k.**  $[-5, 1)$ , pro  $x = -5$  neabs.  
**2a.**  $\frac{1}{1-x}$  na  $(-1, 1)$    **2b.**  $\frac{x}{(1-x)^2}$  na  $(-1, 1)$    **2c.**  $\log \frac{2}{3-x}$  na  $[-1, 3)$    **2d.**  $\frac{1}{(1-2x)^2}$  na  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$    **2e.**  $\frac{2}{(1-x)^3}$  na  $(-1, 1)$    **2f.**  $x + (1-x)\log(1-x)$  pro  $[-1, 1)$ , 1 pro  $x = 1$   
**2g.**  $\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$  pro  $(-1, 1)$    **2h.**  $-\log|1-x|$  pro  $[-1, 1)$    **2i.**  $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$  pro  $(-1, 1)$    **2j.**  $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$    **2k.**  $\frac{1}{2} - \log 2$ , z 2f.  $(x = \frac{1}{2})$    **2l.**  $\frac{1}{4} \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^3}$ , z 2e.  $(x = \frac{1}{4})$    **2m.**  $\frac{9}{4}$ , z 2b.  $(x = \frac{1}{3})$ , pozor na "meze"   **2n.**  $\frac{3}{4}$