8. Cvičení z MA II. (10.4.07)

Co je to bodová / stejnoměrná / lokálně stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí? Jaké mezi nimi platí vztahy? Kdy z bodové / lok. stejnoměrné konvergence plyne stejnoměrná konvergence? Jak zní kritérium stejnoměrné konvergence pro posloupnost funkcí?
(Zde značím stejnoměrnou konvergenci symbolem $\rightrightarrows$.)

1. Určete, zda a na jakých intervalech konvergují bodově / stejnoměrně / lokálně stejnoměrně následující posloupnosti funkcí.

(a) $f_n(x) \begin{cases} 1/x & x \in [1/n, 1) \\ n & x \in (0, 1/n] \end{cases}$ na $(0,1)$ (b) $f_n(x) = \frac{n^2x^3}{1+n^2x^2}$ na R

(c) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ na $[0,1]$ (d) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ na R

(e) $f_n(x) = x^{n+1} - x^{n-1}$ na $[0,1]$ (f) $f_n(x) = e^{-|x-1/n|n^2}$ na R

(g) $f_n(x) = x^n - x^{3n}$ na $[0,1]$ (h) $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ na R

(i) $f_n(x) = \frac{nx}{1+x+n}$ na $[0,1]$

(j) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ na $[0, 1-\epsilon]$, na $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$, na $[1+\epsilon, \infty]$, $(\epsilon \in (0,1))$

(k) $f_n(x) = e^{-(nx)^2}$ na R (l) $f_n(x) = e^{-x^2/n}$ na R

(m) $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{nx}$ na $R - \{0\}$

Dú: Nechť $f_n \rightrightarrows f$ a $g_n \rightrightarrows g$ na M. Platí následující? Případně uveďte protipříklady.

(a) $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ na M

(b) $f_n \cdot g_n \rightrightarrows f \cdot g$ na M,
(a za dodatečného předpokladu, že f i g jsou omezené na M?)

(c) $\frac{f_n}{g_n} \rightrightarrows \frac{f}{g}$ na M (pokud všechny podíly mají smysl)

Řešení:
1a. $f_n \to 1/x$, na $(0,1)$, nikoli stejnoměrně (integrovatelnost) **1b.** $f_n \rightrightarrows x$, na R **1c.** $f_n \to 0$, na $[0,1]$, nikoli stejnoměrně ($\limsup = 1/e$) **1d.** $f_n \to 0$, na $(-1,1]$, jinde nekonverguje, $f_n \rightrightarrows 0$, na $[-1+\epsilon,1]$, lok. stejnoměrně na $(-1,1]$ **1e.** $f_n \rightrightarrows 0$, na $[0,1]$ **1f.** $f_n \to 0$, na R, nikoli (lokálně) stejnoměrně ($\sup \geq 1$) **1g.** $f_n \to 0$, na $[0,1]$, $f_n \rightrightarrows 0$, na $[0,1-\epsilon]$ (kde $\epsilon \in (0,1)$), na žádném $[1-\epsilon,1]$ ne stejnoměrně **1h.** $f_n \to 0$, na R, $f_n \rightrightarrows 0$, na (k,∞) pro lib. $k \in R$, na žádném $(-\infty,k)$ ne stejnoměrně **1i.** $f_n \rightrightarrows x$, na $[0,1]$ (dokonce na $[0,k]$, ne na okolí $+\infty$) **1j.** $f_n \to 0$ pro $x \in [0,1)$, $\to \frac{1}{2}$ pro $x=1$, $\to 1$ pro $x>1$, stejnoměrně / nestejnoměrně / stejnoměrně **1k.** $f_n \to 0$ pro $x \neq 0$, $\to 1$ pro $x=0$, nikoli (lokálně) stejnoměrně (spojitost nebo záměna limit) **1l.** $f_n \to 1$ na R, nikoli stejnoměrně (záměna limit pro $x \to \infty$), $f_n \rightrightarrows 1$ na $[-k,k]$ ($k>0$), a tedy lokálně stejnoměrně **1m.** $f_n \to 0$, nikoli stejnoměrně na každé množině obsahující $x_k \to 0, x_k \neq 0$ (záměna limit)