

2. Cvičení z MA II. (27.2.07)

Co je metoda substituce pro hledání primitivní funkce (2 pravidla)?

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Substituce:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \quad \int \sqrt[3]{1-3x} dx \quad \text{(b)} \quad \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \quad \text{(c)} \quad \int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}} dx \quad \text{(d)} \quad \int \frac{\log^2 x}{x} dx \\
 & \text{(e)} \quad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{(f)} \quad \int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx \quad \text{(g)} \quad \int x e^{-x^2} dx \quad \text{(h)} \quad \int \operatorname{tg} x dx \\
 & \text{(i)} \quad \int \operatorname{cotg} x dx \quad \text{(j)} \quad \int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}} dx \quad \text{(k)} \quad \int \frac{(1-x)^3}{x \sqrt[3]{x}} dx \quad \text{(l)} \quad \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \\
 & \text{(m)} \quad \int \frac{x-1}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})} dx
 \end{aligned}$$

tipy pro substituce:

- 'mocnina' ... $t = ax^k + b$ ($dt = akx^{(k-1)} dx$)
- goniometrické ... $R = \frac{P}{Q}$, kde P, Q polynomy
 - $t = \sin x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos)$, tj. 'lichá wrt $\cos x$ '
 - $t = \cos x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos)$, tj. 'lichá wrt $\sin x$ '
 - $t = \operatorname{tg} x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos)$, tj. 'sudá wrt $\sin x, \cos x$ '
 - $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, univerzální, ale nepříjemná
- odmocnina ...
 - $t = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, pro $R(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}})$, $q \in \mathbb{N}$, $ad - bc \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
 - $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, pro ${}^q\sqrt{S^{p_1}}, \dots, {}^q\sqrt{S^{p_n}}$; $S = (\frac{ax+b}{cx+d})$; $s = NSN(q_1, \dots, q_n)$
- eulerova ... $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$ nebo $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$,
pokud $ax^2 + bx + c$ nemá R kořeny a $a > 0, c > 0$

2. Rozklad na parciální zlomky - určete primitivní funkce k následujícím funkcím

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \quad f(x) = \frac{x^2+2x}{x+3} \quad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{3x+4}{x^2+3x+5} \quad \text{(c)} \quad f(x) = \frac{1}{(3x+1)(x-1)} \quad (1k) \\
 & \text{(d)} \quad f(x) = \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} \quad \text{(e)} \quad f(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} \quad \text{(f)} \quad f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^4+2x^2+1)} \\
 & \text{(g)} \quad f(x) = \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3} \quad \text{(h)} \quad f(x) = \frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)}
 \end{aligned}$$

Dů. Najděte primitivní funkci na maximálním intervalu existence

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \quad \int \arcsin \sin \frac{4x}{x^2+1} dx \\
 & \text{(b)} \quad \int \frac{1}{x+(\sqrt{x^2+x+1})} dx \quad (\text{Nápověda: zkuste substituci } \sqrt{x^2+x+1} = x+t)
 \end{aligned}$$

Řešení: (až na c)

1a. $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$, na R **1b.** $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, na R **1c.** $\frac{1}{5} \cdot \sqrt{2+5x^2}$, na R **1d.** $\frac{1}{3} \log^3 x$,
na $(0, +\infty)$ **1e.** $\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})$, na $(-1, 1)$ **1f.** $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2}$, na $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
1g. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, na R **1h.** $-\log|\cos x|$, na každém $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in Z$ **1i.**
 $\log|\sin x|$, na každém $(k\pi, (k+1)\pi), k \in Z$ **1j.** $\frac{1}{3} \cdot \arcsin(x - \frac{1}{3})$, na $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ **1k.**
 $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ **1l.** $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2\sin^2 x - 1) = -\frac{1}{2}$
 $\operatorname{arctg}(2\cos^2 x - 1)$, na R **1m.** $3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\log\sqrt[6]{x} + 6\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\frac{1}{\sqrt{x}}$ na R
1n. $\sqrt{x^2+x+1} - x + 2\log|\sqrt{x^2+x+1} - x - 2| - \frac{1}{2}\log|2\sqrt{x^2+x+1} - 2x - 1|$, na
 $(-\infty, -1)$ a na $(-1, \infty)$
2a. $\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x+3|$, na $(-\infty, -3)$ a na $(-3, \infty)$ **2b.** $\frac{2}{3}\ln(x^2+3x+5) - \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg}$
 $\frac{1}{\sqrt{11}}(2x+3)$, na R **2c.** $F(x) = \frac{1}{4}\log|\frac{x-1}{3x+1}|$, na $(-\infty, -\frac{1}{3})$ a na $(-\frac{1}{3}, 1)$ a na $(1, \infty)$
2d. 2e. 2f. $F(x) = -\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}$, na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, \infty)$
2g. 2h. $F(x) = -\frac{1}{50}\log(x^2+2x+2) + \frac{1}{10}\frac{x+2}{x^2+2x+2} + \frac{1}{100}\log|x-1| + \frac{3}{100}\log|x+3| +$
 $\frac{7}{50}\operatorname{arctg}(x+1)$, na $(-\infty, -3)$, na $(-3, 1)$ a na $(1, \infty)$