11. Cvičení z MA II. (15.5.07)

Co je to mocninná řada? Jak zjistíte její poloměr konvergence R?
Jaké věty platí pro mocninné řady (lokálně stejnoměrná konvergence na $(-R,R) \Rightarrow$ možnost záměny lim, $\sum$; integrování a derivace člen po členu; $\lim_{x\to R^-}$)

3. Následující funkce vyjádřete jako součet mocninné řady se středem v 0 (na maximálním otevřeném intervalu):

(a) $f(x) = e^{-x^2}$ spočítejte $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

(b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$ (c) $f(x) = xe^{2x}$

(d) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ (e) $f(x) = \cos^2 x$ (f) $f(x) = \frac{x}{2-x}$

(g) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$ (h) $f(x) = \log(1+x)$ (i) $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$

(j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (vyjádřete $\arcsin x$) (k) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

(l) $f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}$ (m) $f(x) = \log 2$ vyjádřete jako mocninnou řadu

(n) spočítejte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

4. Vyjádřete primitivní funkci pomocí řad funkcí ($F'(x) = f(x)$):

(a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pro $x \neq 0, f(0) = 1$

(b) $f(x) = \frac{\log(x+1)}{x}$ pro $x \in (-1,0) \cup (0,\infty), f(0) = 1$

(c) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ pro $x \neq 0$

(d) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ pro $x \neq 0, f(0) = 1$

Řešení:
3a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$ **3b.** $\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0 \neq f(x), x \neq 0$ **3c.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$, pro $x \in R$ **3d.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1}$, na $[-1,1]$ (Abel) **3e.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, na R **3f.** $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^n$, na $(-2,2)$ **3g.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$, na $(-3,3)$ **3h.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, na $(-1,1)$, ř.k. $\to$ (Abel) i pro $x=1$ **3i.** $2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pro $|x|<1$ **3j.** $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^{2n}$ pro $|x|<1$, tedy $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pro $|x|<1$ **3k.** $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, na $(-1,1)$ **3l.** $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n 2^{n+1})x^n$, na $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ **3m.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ **3n.** $2e$ (Abel)
4a. spojitost v $R \to \exists$ prim. fce $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$, na R **4b.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n^2}$, na $(-1,1]$ **4c.** $\log|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}$ **4d.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, na $[-1,1]$