5. Cvičení z MA II. (20.3.07)

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Hyperbolicke funkce (a Dú):

(a) $\int x^2 e^x \sin x dx$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ (Zkuste substituci $x = \sinh t$, kde $\sinh t = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$)

Určitý integrál. Jak se definuje Riemannův integrál? Kdy je funkce R-integrovatelná? Jak se definuje Newtonův integrál, kdy je funkce N-integrovatelná?
Jaké znáte metody výpočtu určitého integrálu (z definice, pomocí primitivní funkce (+ aditivní vlastnosti), per partes a substituce pro určitý integrál)?

2. Určitý integrál z definice:
(Platí: Pro $a < b < c$ reálná je ${}_{(R)}\int_a^c = {}_{(R)}\int_a^b + {}_{(R)}\int_b^c$, pokud má jedna strana smysl.)

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx$ (b) $\int_{-2}^{2} \lfloor x \rfloor dx$, kde $\lfloor x \rfloor$ je celá část x

3. Určitý integrál pomocí primitivní funkce:
(Platí: Nechť f spoj. na (a, b) a F je primitivní k f. Potom ${}_{(R)}\int_a^b = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x)$, pokud je alespoň jedna strana R číslo)

(a) $\int_0^1 x^\alpha dx$, $\alpha \in R$ (b) $\int_0^\infty \sin x dx$

(c) $\int_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$ (d) $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (e) $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(f) $\int_0^8 \sqrt{1+x} dx$ (g) $\int_0^\pi \frac{\sin 2x}{\sin x}$ (h) $\int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+2} dx$

(i) $\int_0^5 |x^2 - 3x + 2| dx$ (j) $\int_0^a |\cos x| dx$, kde $a = \frac{49}{6}\pi$

4. Per partes a substituce pro urč. integrál (vs. primitivní fce):

(a) $\int_1^e x^2 \ln x dx$ (b) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$ (c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos x dx$

(d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx$ (e) $\int_0^\pi \frac{1}{1+3\sin^2 x} dx$

(f) $\int_0^{10\pi} (\operatorname{arctg} (\sin^3 x + \sin(\sin x)) - \sin x) \cdot \cos x dx$

(g) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+\cos x)^2} \sin \frac{1}{1+\cos x} \sin x dx$

5. Ještě příklady na substituci z minulé hodiny – goniometrické funkce:

(a) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$ (d) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$ (e) $\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2} dx$

(g) $\int \frac{1}{5+4\sin x} dx$ (h) $\int \frac{1}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x} dx$ (i) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x} dx$

(j) $\int \frac{1}{\sin x \cos^4 x} dx$

Dú: Rozmyslete si, že platí:

(a) $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\log x}{x} dx = 0$ pro $a > 0$

(b) Nechť f je spoj. a platí $f(\frac{\pi}{2}+y) = f(\frac{\pi}{2}-y)$ pro $\forall y \in R$. Potom

$$\int_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}+a} f(x)\cos x dx = 0$$

Řešení: (až na c)

1a. $\frac{1}{2}e^x((x^2-1)\sin x-(x-1)^2)\cos x$, na R **1b.** $\log(x+\sqrt{x^2+1})$, na R
2a. 2π **2b.** -2
3a. pro $\alpha \le -1$ neex., pro $\alpha > 1 \ldots \frac{1}{\alpha+1}$ **3b.** neex. **3c.** $\frac{7\pi}{12}$ **3d.** $\frac{\pi}{3}$ **3e.** $-\frac{\pi}{3}$ **3f.** $\frac{52}{3}$ **3g.** 0 **3h.** $\frac{\pi}{12}$ **3i.** $\frac{29}{2}$ **3j.** $\frac{33}{2}$
4a. $\frac{1}{9}(2e^3+1)$ **4b.** $\frac{1}{4}(\pi-2)$ (?) **4c.** 2^{-6} **4d.** $\frac{\pi}{4}$ **4e.** $\frac{\pi}{2}$ **4f.** 0 **4g.** neex.
5a. $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x$, na R **5d.** $x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$, platí na D_f mimo body $\frac{\pi}{2}+k\pi$, posun vždy o $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ **5e.** $\frac{-1}{1+\operatorname{tg} x}$, na D_f mimo $\frac{\pi}{2}+k\pi$, lze spoj. dodef. 0 **5g.** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\frac{1}{3}(5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4))$, mimo $(2k+1)\pi, k \in Z$, posun vždy o $\frac{2\pi}{3}$ **5h.** $-\frac{1}{2}(\operatorname{cotg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg} x))$, mimo $\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z$ **5i.** $\frac{1}{6}\log(1-\cos x)(2+\cos x)^2/(1+\cos x)^3)$, mimo $k\pi, k \in Z$ ($\equiv \frac{1}{3}\log(|t|(t^2+3))$, kde $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$) **5j.** $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x}$, mimo $\frac{k\pi}{2}, k \in Z$