

### 3. Cvičení z MA II. (6.3.07)

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Rozcvička:

- (a)  $\int x^n \ln x dx$  (b)  $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$  (c)  $\int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} dx$   
(d)  $\int \sin x \cdot \sqrt{2 + \cos x} dx$  (e)  $\int \frac{e^{5x}-1}{e^{2x}} dx$  (f)  $\int x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx$   
(g)  $\int x \cdot \sqrt{2 - 3x^2} dx$  (h)  $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$  (i)  $\int \frac{1}{x^2-1} dx$   
(j)  $\int \frac{5x}{2x+3} dx$  (k)  $\int \sin x \cos 2x dx$  (l)  $\int \sin x \sin 2x dx$

2. Najděte primitivní funkci na maximálním intervalu existence:

- (a)  $\int \arcsin \sin \frac{4x}{x^2+1} dx$   
(b)  $\int \frac{1}{x+(\sqrt{x^2+x+1})} dx$  (Nápověda: zkuste substituci  $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$ )

3. Rozklad na parciální zlomky – určete primitivní funkce k následujícím funkcím (příklady z minulé hodiny):

- (e)  $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$  (f)  $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^4+2x^2+1)}$

4. Důležité příklady:

- (a)  $\int \frac{1}{\sin x} dx$  (na  $(0, \pi)$ , užíjte substituci  $\tg \frac{x}{2} = t$ )  
(b)  $\int \frac{1}{1+3 \sin^2 x} dx$  (na  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , užíjte substituci  $\tg x = t$ )

5. A další příklady na určování primitivní funkce:

- (a)  $\int \frac{x^{17}-5}{x-1} dx$  (b)  $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx$  (c)  $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$   
(d)  $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2} dx$  (e)  $\int \cos^2 x dx$  (f)  $\int \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

Dů. Rozklad na parciální zlomky – určete primitivní funkce k následujícím funkcím (příklady z minulé hodiny):

- (g)  $f(x) = \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3}$  (h)  $f(x) = \frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)}$

**Řešení:** (až na  $c$ )

**2b.**  $\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 2 \log |\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2| - \frac{1}{2} \log |2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1|$ , na  $(-\infty, -1)$  a na  $(-1, \infty)$

**3a.**  $\frac{x^2}{2} + x + \log |x - 1| - \frac{1}{2} \log |x^2 + 1| - \operatorname{arctg} x$ , na  $(-\infty, 1)$  a na  $(1, \infty)$     **3b.**  $-\frac{1}{2} \log |x + 1| + \frac{1}{4} \log (x^2 + 1) + \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2+1}$ , na  $(-\infty, -1)$  a na  $(-1, \infty)$

**4a.**  $\log \operatorname{tg} \frac{x}{2} \equiv \frac{1}{2} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ , na  $(0, \pi)$     **4b.**  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} (2 \operatorname{tg} x)$ , na  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

**5a.**  $\sum_1^{17} \frac{x^k}{k} - 4 \log |x - 1|$ , na  $(-\infty, 1)$  a na  $(1, \infty)$     **5b.**  $\frac{-10 \cdot 5^{-x} \log 2 + 2^{-x} \log 5}{5 \log 5 \log 2}$ , na  $R$

**5c.**  $\frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x$ , na  $R$     **5d.**  $-\frac{1}{2} x + \frac{1}{3} \log |e^x - 1| + \frac{1}{6} \log (e^x + 2)$ , na  $(-\infty, 0)$  a na  $(0, \infty)$     **5e.**  $\frac{1}{2} (\sin x \cos x + x)$ , na  $R$     **5f.**  $x \log (x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1}$ , na  $R$