

1. Cvičení z MA II. (20.2.07)

Co jsou to primitivní funkce? Jaké má vlastnosti (spojitost)? Kdy má funkce primitivní funkci (spojitost)? Jaké znáte metody výpočtu primitivních funkcí (tabulkové integrály, per partes, substituce)?

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Rozcvička:

- (a) $\int x^3 + 2x + \frac{16}{x} dx$ (b) $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3 \cos x dx$ (c) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$
(d) $\int (3e^x + \frac{1}{x}) dx$ (e) $\int (\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{x}) dx$ (f) $\int \frac{x^2-1}{x} dx$
(g) $\int (\sqrt[3]{x} + x^2) dx$ (h) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ (i) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$
(j) $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ (k) $\int \frac{1}{(3x^2-2x-1)} dx$

2. 'Lepení' primitivních funkcí:

- (a) $\int |x| dx$ (b) $\int f(x) dx$ $f(x) = 0$ ($x \leq 0$), $f(x) = x$ ($x > 0$)
(c) $\int \sqrt{x^6} dx$ (d) $\int |\cos x| dx$ (e) $\int |\sin x + \cos x| dx$

3. Per partes:

- (a) $\int (x^2 - x) \exp(x) dx$ (b) $\int x \sin x dx$
(c) $\int e^x (\sin x + \cos x) dx$ (d) $\int \sqrt{x} \log^2 x dx$
(e) $\int \log |1+x| dx$ (f) $\int 5^x \sin x dx$
(g) $\int \sin^7 x \cos x dx$ (h) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$
(i) $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$

Řešení: (až na c)

1a. $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 16 \log |x|$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ **1b.** $18e^x + 2e^{8x} - \log |x| + 3 \sin x$,
na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ **1c.** $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2}$, na R

...

1j. $\frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$, na $(-\infty, a)$ a na (a, ∞) pro $n > 1$; $\log(x-a)$, na (a, ∞) pro
 $n = 1$; $\log(a-x)$, na $(-\infty, a)$ pro $n = 1$ **1k.** $\frac{1}{4} \log \left| \frac{x-1}{3x+1} \right|$, na $(-\infty, -\frac{1}{3})$ a na
 $(-\frac{1}{3}, 1)$ a na $(1, \infty)$

2a. $\operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{x^2}{2}$, na R **2b.** $F(x) = c$ na $< -\infty, 0 >$, $F(x) = \frac{x^2}{2}$ na $< 0, \infty >$

2c. $\frac{1}{4}|x| \cdot x^3$, na R **2d.** $(-1)^k \sin x + 2k$, na $x \in < -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi >$, $k \in Z$ **2e.**
 $(-1)^k (-\cos x + \sin x) + 2k\sqrt{2}$, pro $x \in < -\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + (k+1)\pi >$ pro $\forall k \in Z$

3a. $(x^2 - 3x + 3) \exp x$, na R **3b.** $\sin x - x \cos x$, na R **3c.** $e^x \sin x$, na R

3d. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}(\log^2 x - \frac{4}{3} \log x + \frac{8}{9})$, na $(0, +\infty)$ **3e.** $x \log |1+x| - x + \log |1+x|$, na
 $(-\infty, -1)$ a na $(-1, \infty)$ **3f.** $\frac{5^x}{1+\log^2 5}(\log 5 \cdot \sin x - \cos x)$, na R **3g.** $\frac{1}{8} \sin^8 x$, na

R **3h.** $\frac{1}{2}(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x)$, na R **3i.** $I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$, pro $n \in N$ na
 R