9. Cvičení z MA II. (17.4.07)

Co je to bodová / stejnoměrná / lokálně stejnoměrná konvergence řad funkcí? Jaké znáte věty o (lokálně) stejnoměrné konvergence řad funkcí?
(Zde značím stejnoměrnou konvergenci symbolem $\rightrightarrows$.)

1. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řad funkcí.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ na $[0,1]$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4+x^2}$ na $[0,+\infty)$

Na kterých maximálních intervalech konvergují následující řady bodově, lokálně stejnoměrně, stejnoměrně?

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-7}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{x^2}{n^2})$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty}$ arctg $\frac{2x}{x^2+n^3}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ (j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$

2. Spočtěte limity:

(a) $\lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n+1}$ (b) $\lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$

(c) $\lim_{x\to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$

3. Platí $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$ následující posloupnosti funkcí? Jak je to se stejnoměrnou konvergencí f_n na $(0,1)$?

(a) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ (b) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ (c) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$

4. Dokažte, že funkce $\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ má na intervalu $(1,\infty)$ derivace všech řádů.

5. Nechť $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p+x^2n^q}$, kde $p,q \geq 0$. Dokažte, že

(a) f je spojitá na $(0,\infty)$, pokud $\max p,q > 1$
(b) f je spojitá na R, pokud $p+q > 2$
(c) vyšetřete def. obor a spojitost f v závislosti na p,q

Dú: Nechť **a**$= \{a_k\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel, nechť $\xi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^x}$. Co lze říci o def. oboru, spojitosti a derivacích funkce ξ?

Řešení:

1a. nekonverg. na $[0,1]$ **1b.** stejnoměrně (Weierstrass) **1c.** bodově na $(-1,1)$, stejnoměrně na $[-1+\epsilon, 1-\epsilon], \epsilon \in (0,1)$, lokálně stejnoměrně na $(-1,1)$ **1d.** stejnoměrně na $[-1+\epsilon, 0), (0, 1-\epsilon], \epsilon \in (0,1)$ (přestože prvních 6 členů v okolí 0 neomezených) **1e.** stejnoměrně na R, i řada abs. hodnot (Weierstrass) **1f.** bodově na R (absolutně), stejnoměrná na omez. intervalech (Weierstrass), není omez. na okolí $+, -\infty$ (nutná p.) **1g.** stejnoměrně na R (Weierstrass), i pro řadu abs. hodnot **1h.** bodově (absolutně) na $M = \{x \in R; x \neq -2^n, n \in N\}$, stejnoměrně na $(K, +\infty) \cap M, K \in R$ (Weierstrass), není stejnoměrná na $(-\infty, K) \cap M$ (nutná podm.) **1i.** bodově na $M = \{x \in R; -x \notin N\}$ (neabsolutně), není stejnoměrná na $(-\infty, K) \cap M$ (nutná podm.) stejnoměrně na $(K, +\infty) \cap M, K \in R$ (Dirichlet) **1j.** stejnoměrně na R (neabsolutně, Dirichlet)

2a. konverg. stejnoměrně na $(0, +\infty)$ (Abel), $\lim ... = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{2}\log 2$ **2b.** 1 **2c.** 1 (konverguje stejnoměrně např. na $(-1, \infty)$, Weierstrass)

3a. $f_n \to 0$ na R, ne stejnoměrně na $(0,1), \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \neq$
$\neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$ **3b.** $f_n \to 0$ na $[0,1]$, ne stejnoměrně na $(0,1)$ **3c.** $f_n \rightrightarrows 0$ na $(0,1)$, a tedy $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$

4. řada $n-$tých derivací konv. lok. stejnoměrně na $(1, infty), \forall n$ (Weierstrass)

5a. konverguje lok. stejnoměrně na $(0, \infty)$ (Weierstrass) **5b.** konverguje stejnoměrně na R **5c.** pro $\max(p,q) \leq 1$ je $D_f = 0$, pro $\max(p,q) > 1$ je $D_f = R$; pro $\max(p,q) > 1$ je f spojitá na R; pro $p + q > 2$ nebo $p > q$ je f spojitá na R; pro $p + q \leq 2$ a $p < q$ není f spojitá v 0

Dú. D_ξ je $0, (\alpha, \infty), [\alpha, \infty)$, nebo R; ξ je spojitá na svém def. oboru; pro $x \in (\alpha, \infty)$ (pro def. obor (α, ∞) nebo $[\alpha, \infty)$), resp. $x \in R$ má fce ξ pro všechna $n \in N$ vlastní $n-$tou derivaci, pro $[\alpha, \infty)$ i der. zprava v b. α (pokud konverguje - nemusí) (Weierstrass, Abel + věty o záměnách), $\xi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_k \log^n k}{k^x}$