4. Cvičení z MA II. (13.3.07)

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Rozcvička:

(a) $\int \frac{\log x}{x(1+\log x)} dx$ (b) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$ (c) $\int \log(x+\sqrt{1+x^2}) dx$

(d) $\int \arccos x dx$ (e) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

2. Najděte primitivní funkci na maximálním intervalu existence (Dú):

(b) $\int \frac{1}{x+(\sqrt{x^2+x+1})} dx$ (Nápověda: zkuste substituci $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$)

(g) $f(x) = \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3}$ (h) $f(x) = \frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)}$

3. A další příklady na určování primitivní funkce:

(a) $\int \frac{x^{17}-5}{x-1} dx$ (b) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx$ (c) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$

(d) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}$ (e) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$

4. Zvolte vhodnou substituci a spočítejte (na intervalech, které jsou 'přirozeným' definičním oborem výsledných primitivních funkcí):

(a) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$ (b) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx$ (c) $\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} dx$

(d) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$ (e) $\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2} dx$ (f) $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5} dx$

(g) $\int \frac{1}{5+4\sin x} dx$ (h) $\int \frac{1}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x} dx$ (i) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x} dx$

(j) $\int \frac{1}{\sin x \cos^4 x} dx$

Dú. Spočítejte integrál

(a) $\int x^2 e^x \sin x dx$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ (Zkuste substituci $x = \sinh t$, kde $\sinh t = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$)

Řešení: (až na c)

1a. $\log x - \log|1+\log x|$, na $(0,\frac{1}{e})$ a na $(\frac{1}{e},\infty)$ **1b.** $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$, na $(0,\infty)$
1c. $x\log(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}$, na R **1d.** $x\cdot\arccos x-\sqrt{1-x^2}$, na $(-1,1)$ **1e.** $-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}$, na $(0,1)$

2b. $\sqrt{x^2+x+1}-x+2\log|\sqrt{x^2+x+1}-x-2|-\frac{1}{2}\log|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1|$, na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,\infty)$ **2g.** $\frac{-2}{x-1}-\log|x-1|+\frac{1}{2}\log(x^2+2x+3)-\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1))$, na $(-\infty,1)$ a na $(1,\infty)$ **2h.** $-\frac{1}{50}\log(x^2+2x+2)+\frac{1}{10}\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\frac{1}{100}\log|x-1|+\frac{3}{100}\log|x+3|+\frac{7}{50}\operatorname{arctg}(x+1)$, na $(-\infty,-3)$, na $(-3,1)$ a na $(1,\infty)$

3a. $\sum_1^{17}\frac{x^k}{k}-4\log|x-1|$, na $(-\infty,1)$ a na $(1,\infty)$ **3b.** $\frac{-10\cdot 5^{-x}\log 2+2^{-x}\log 5}{5\log 5\log 2}$, na R
3c. $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x$, na R **3d.** $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\log|e^x-1|+\frac{1}{6}\log(e^x+2)$, na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **3e.** $\log(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1})$, na R

4a. $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x$, na R **4b.** $\frac{1}{\cos x-1}$, na $(2k\pi,2(k+1)\pi), k\in Z$ **4c.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log|\sin x+\cos x|$, na $D_f(x\neq-\frac{\pi}{4}+2k\pi, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z)$ **4d.** $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)$, platí na D_f mimo body $\frac{\pi}{2}+k\pi$, posun vždy o $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ **4e.** $\frac{-1}{1+\operatorname{tg}x}$, na D_f mimo $\frac{\pi}{2}+k\pi$, lze spoj. dodef. 0 **4f.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{5}}(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1))$, mimo $\pi+2k\pi, k\in Z$, posun vždy o $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ **4g.** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\frac{1}{3}(5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4))$, mimo $(2k+1)\pi, k\in Z$, posun vždy o $\frac{2\pi}{3}$ **4h.** $-\frac{1}{2}(\operatorname{cotg}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}x))$, mimo $\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$
$\frac{1}{6}\log(1-\cos x)(2+\cos x)^2/(1+\cos x)^3)$, mimo $k\pi, k\in Z$ $(\equiv\frac{1}{3}\log(|t|(t^2+3))$, kde $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2})$ $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x}$, mimo $\frac{k\pi}{2}, k\in Z$