7. Cvičení z MA II. (4.4.07)

1. Ještě několik určitých integrálů jako rozcvička (symbolem $\int_a^b$ zde rozumíme zobecněný Riemannův integrál):

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$ (b) $\int_0^2 |1-x| dx$ (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos 2x} dx$

(d) $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+x+1} dx$ (e) $\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+x+1} dx$ (f) $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2+2} dx$

(g) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx$ (h) $\int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx$ (i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}$

(j) $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx$ (k) $\int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$ (l) $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{arctg} x}{x^2} dx$

2. Nepříjemné substituce:

(a) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ (b) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ (c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ (e) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}} dx$ (f) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx$

(g) $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}} dx$ (h) $\int \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx$

3. Příklady písemkového typu (doc. Kalenda):

(a) $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + cos x + 2} dx$ (b) $\int \frac{x}{x^2+7+\sqrt{x^2+7}} dx$ (c) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)(x^2+x+1)} dx$

(d) $\int \frac{(\mathrm{tg}\ x + \mathrm{cotg}\ x)^2}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx$ (e) $\int \frac{\sin x}{9\cos^2 x + 2\sin^4 x} dx$ (f) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} dx$

(g) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x(1-\cos x)} dx$

4. Aplikace určitého integrálu – spočítejte plochu ohraničenou křivkami / délku křivky / objem rotačního tělesa:

(a) plocha $y = \sin^2 x, y = \mathrm{tg}\ x, x \in < 0, \frac{\pi}{4} >$

(b) délka $f(x) = \frac{x^2}{2}, x \in < 0, 1 >$

(c) délka křivky daná funkcí f, kde $f'(x) = \sqrt{x^2-1}$, $x \in < 2, 3 >$ (jak vypadá f?)

(d) délka polokružnice $y = \sqrt{1-x^2}$

(e) objem tělesa, kt. vznikne rotací plochy kolem x, $f(x) = \sin x, x \in < 0, \pi >$

Dú: Kdy konvergují následující řady?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad p > 0$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s} \quad s > 0$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\frac{1}{n})$

Řešení:
1a. $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ **1b.** 1 **1c.** $\sqrt{2}$ **1d.** $\log\sqrt{3} - \sqrt{3}\frac{\pi}{6}$ **1e.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ **1f.** $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$ **1g.** $\frac{1}{6}$ **1h.** $\frac{8191}{26}$ **1i.** π **1j.** $\frac{\pi}{2}$ **1k.** $\sqrt{x^2-9} - 3 \text{ arctg } (\frac{1}{3}\sqrt{x^2-9})$, tedy $4 - 3 \text{ arctg } \frac{4}{3}$ **1l.** $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$
2a. $\log|1-t^2| - 2 \text{ arctg } t$, kde $t = \sqrt{\frac{x-1}{1+1}}$ **2b.** $\log(x + \sqrt{x^2+1}) = \text{argsinh } x$ **2c.** $\log(x+\sqrt{x^2-1})$ **2d. 2e. 2f. 2g.** $\log|\frac{t-1}{t+1}|$, kde $\sqrt{x^2+5x+1} = x+t$, tedy $\log\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2}$
2h. $\arcsin(\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2}))$, nebo $2\text{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$
3a. 3b. 3c. 3d. 3e. 3f. 3g.
4a. $\frac{1}{8}(2-\pi+4\log 2)$ **4b.** $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log|1+\sqrt{2}|$ **4c.** $\frac{5}{2}$, $f(x) = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \log|x+\sqrt{x^2-1}|) + c$ **4d.** π **4e.** $\frac{\pi^2}{2}$