Porovnávání funkcí

Výrok $P(n)$ platí pro dostatečně velké $n \quad \Leftrightarrow \quad \exists n_0 : \quad \forall n > n_0 : \ P(n)$

Mějme dvě funkce f a g:

$$f, g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$$

Potom říkáme:

- $f(n) = O(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0$ tak, že pro dostatečně velké n platí:

$$f(n) \leq c.g(n)$$

- $f(n) = \Omega(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad g(n) = O(f(n))$
- $f(n) = \Theta(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = O(g(n))$ a zároveň $g(n) = O(f(n))$
- $f(n) = o(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0$ a pro dostatečně velké n platí:

$$f(n) \leq \varepsilon.g(n)$$

- $f(n) = \omega(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad g(n) = o(f(n))$

Intuitivně lze říct, že jednotlivé symboly odpovídají relačním symbolům takto:

- $f = O(g) \rightsquigarrow f \leq g$ (f je asymptoticky menší než g)
- $f = \Omega(g) \rightsquigarrow f \geq g$ (f je asymptoticky větší než g)
- $f = \theta(g) \rightsquigarrow f = g$ (f je asymptoticky stejné jako g)
- $f = o(g) \rightsquigarrow f < g$ (f je asymptoticky *ostře* menší než g)
- $f = \omega(g) \rightsquigarrow f > g$ (f je asymptoticky *ostře* větší než g)

Příklady

Příklad 1 Ukažte, že platí:

$$\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$$

Řešení:

1. Dle definice Θ potřebujeme ukázat, že platí:

$$f(n) = O(g(n)) \ \wedge \ g(n) = O(f(n))$$

pro

$$f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$$

a

$$g(n) = n^2$$

2. Dohromady tedy potřebujeme najít konstanty $c_1, c_2 > 0$ tak, že *pro dostatečně velké n platí* (rozmyslete si, že to vyplývá z definic uvedených výše):
$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2$$

3. Když obě nerovnosti vynásobíme $\frac{1}{n^2}$, dostaneme:
$$c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$$

4. V tomto tvaru si můžeme všimnout, že pro $c_2 = \frac{1}{2}$ je pravá nerovnost splněna pro libovolné $n \geq 1$.

5. Upravíme-li pak dále levou nerovnost na:
$$n(c_1 - \frac{1}{2}) \leq -3$$
je patrné, že když bude $c_1 \leq \frac{1}{2}$, bude určitě možné nalézt n_0 tak, aby $\forall n > n_0$ nerovnost platila. Možností, jak zvolit c_1 je nekonečně mnoho - nám však pro dokončení důkazu stačí vědět, že existuje jedna jediná. Zvolme tedy například $c_1 = \frac{1}{14}$. Zjistíme, že pro $n = 7$ nastane rovnost a pro libovolné $n > 7$ pak bude nerovnost splněna.

6. Dohromady tedy máme $c_1 = 7$ a $c_2 = \frac{1}{2}$. Navíc také k takto zvoleným konstantám existuje $n_0 = 7$ tak, že $\forall n > n_0$:
$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2$$
Q.E.D.

Příklad 2 Ukažte proč neplatí:
$$6n^3 = \Theta(n^2)$$

Řešení:

1. Chceme ukázat, že nelze splnit podmínky stanovené definicí pro Θ. Stačí tedy, když ukážeme, že neplatí buď $f(n) = O(g(n))$ nebo $g(n) = O(f(n))$ pro $f(n) = 6n^3$ a $g(n) = n^2$.

2. Ukážeme sporem, že neplatí $f(n) = O(g(n))$. Pro spor předpokládejme, že $f(n) = O(g(n))$ platí a tedy existuje nějaká konstanta c tak, že *pro dostatečně velké n*:
$$6n^3 \leq cn^2$$

3. Vynásobíme-li naši nerovnost výrazem $\frac{1}{n^2}$, dostaneme:
$$6n \leq c$$

4. Ať už je konstanta c jakákoliv, pro každé n_0 můžeme najít $n > n_0$ tak, že tato nerovnost neplatí. Tím dostáváme spor s předpokladem, že původní nerovnost:

$$6n^3 \leq cn^2$$

platí *pro dostatečně velké* n a dokážeme tak, že nemůže nikdy platit $6n^3 = O(n^2)$. Proto také není možné aby:

$$6n^3 = \Theta(n^2)$$

Q.E.D.