26.2.2007

Naděžda Krylová, Milan Štědrý

Matematika pro chemiky II

Úlohy pro letní semestr

5.	Diferenciální rovnice	1
6.	Nevlastní integrály, posloupnosti, řady	7
7.	Funkce více proměnných	14
8.	Implicitně zadané funkce	22

5.1. Rovnice prvního řádu.

5.101. Rovnice prvního řádu; rozsah je dán tímto přehledem úloh:

- izokliny, grafické řešení:
$$y' = x\ , y' = \sqrt{y}\ , y' = -\frac{x}{y}\ ;$$
- separace proměnných:
$$y' = \sqrt{y}\ , y' = -\frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}\ ;$$
- derivace hledané funkce y je rovna funkci s argumentem y/x:
$$y' = -\frac{2xy}{x^2-y^2}\ ;$$
- lineární rovnice – variace konstant:
$$y' - \frac{y}{2(x+1)} = \mathrm{e}^x\sqrt{x+1}\ ,$$
- odhad partikulárního řešení:
$$y' - 2y = x + 1\ ,$$
- Bernoulliova rovnice:
$$y' + \frac{y}{x} = -y^2 \ln x\ .$$

Řešení uvedená ve výsledcích následujících úloh slouží pouze pro ověření technické správnosti výpočtů. Diskuse, která by leckde byla na místě, je vynechána. Konstanta c označuje libovolné reálné číslo.

5.102. Řešení těchto rovnic hledejte metodou separace proměnných:

a) $y' = \dfrac{1-2x}{y^2}$,

b) $y' = 1 + y^2$,

c) $2y' + 3 = 4y$,

d) $xy' + y = y^2$,

e) $y' = \dfrac{1+y}{1-x}$,

f) $y' = \dfrac{y^2-3y}{x}$.

Řešení. **a)** $y = \sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$, **b)** $y = \mathrm{tg}(x+c)$, **c)** $y = ce^{2x} + \frac{3}{4}$, **d)** $y = 1/(1-cx)$ a řešení $y \equiv 0$, **e)** $y = c/(1-x) - 1$, **f)** $y = 3/(1-cx^3)$ a další řešení $y \equiv 0$.

5.103. Najděte řešení rovnice
$$y' = -\frac{x}{1+x^2}(1+2y)$$
splňující počáteční podmínku

a) $y(0) = 0$,
b) $y(1) = \frac{1}{2}$,
c) $y(-1) = -1$.

Řešení. **a)** $y = -\frac{1}{2}x^2/(1+x^2)$,
b) $y = \frac{1}{2}(3-x^2)/(1+x^2)$,
c) $y = -\frac{1}{2}(3+x^2)/(1+x^2)$.

5.104. Najděte řešení rovnice
$$y' = \frac{y}{x}\ln y$$
splňující počáteční podmínku

a) $y(1) = 1$.
b) $y(1) = \frac{1}{3}$.
c) $y(-1) = 2$.
d) $y(-2) = \frac{1}{25}$.

Řešení. **a)** $y \equiv 1$. **b)** $y = 3^{-x}$. **c)** $y = 2^{-x}$. **d)** $y = 5^x$.

5.105. Najděte řešení homogenních rovnic

a) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$,

b) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$,

c) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Řešení. **a)** $y = 2x + cx^3(y+x)$ a $y = -x$, **b)** $y^2 = x^2\ln(cx^2)$, $c > 0$, **c)** $\mathrm{arctg}\big(y/x\big) = \ln(c\sqrt{x^2+y^2})$, $c > 0$.

5.106. Najděte řešení rovnice

$$(xy' - y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x$$

splňující počáteční podmínku

$$y(1) = 0.$$

Řešení. $\sqrt{x^2 + y^2} = \exp\left(\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$.

5.107. Najděte řešení těchto lineárních rovnic:

a) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$,

b) $x^2y' + (1 - 2x)y = x^2$,

c) $y' - \dfrac{2x}{1 + x^2}\, y = 1 + x^2$,

d) $y' - y = \dfrac{1 + x^2}{x}\, e^x$,

e) $xy' = x\sin x - y$,

f) $y' + y\cos x = \sin 2x$.

Řešení. **a)** $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)\exp(-x^2)$, **b)** $y = x^2\left(1 + c\exp(\frac{1}{x})\right)$, **c)** $y = (1 + x^2)(c + x)$, **d)** $y = e^x\left(\ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + c\right)$, **e)** $y = (\sin x - x\cos x + c)/x$, **f)** $y = c\,\exp(-\sin x) + 2(\sin x - 1)$.

5.108. Najděte řešení Bernoulliových rovnic:

a) $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$,

b) $y' - y\operatorname{tg} x + y^2\cos x = 0$,

c) $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

Řešení. **a)** $y(x + 1)(c + \ln|x + 1|) = 1$, **b)** $y\ (x + c)\cos x = 1$, **c)** $1 = y^2(c\ \exp(2x^2) + x^2 + \frac{1}{2})$.

5.2. Rovnice druhého řádu

5.201. Rovnice druhého řádu (pouze s konstantními reálnými koeficienty v diferenciálním operátoru); rozsah je dán tímto přehledem úloh:

- lineární homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' - 3y &= 0,\\ y'' - 2y' + \ \ y &= 0,\\ y'' + \ \ y' + 2y &= 0,\end{aligned}$$

- lineární nehomogenní rovnice

∘ partikulární řešení variací konstant i odhadem:

$$y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x - 1)\ ,$$

∘ partikulární řešení odhadem, tj. rovnic se speciální pravou stranou tvaru

$$\mathrm{e}^{ax}\big(p(x)\cos bx + q(x)\sin bx\big),$$

kde a, b jsou reálná čísla a p, q jsou polynomy s reálnými koeficienty (komplexní číslo

$$\tilde{\lambda} = a + \mathrm{i}b$$

je srovnáváno s kořeny charakteristické rovnice):

$$\begin{aligned} y'' + 2y' \qquad &= \quad x + 1\ ,\\ y'' - 3y' + 2y &= \mathrm{e}^{-x}(x - 1)\ ,\\ y'' \qquad + \ \ y &= \quad \cos x\ .\end{aligned}$$

5.202. Najděte obecná řešení homogenních rovnic:

a) $y'' + y' - 2y = 0$,

b) $y'' - 9y = 0$,

c) $y'' - 4y' = 0$,

d) $y'' - 2y' - y = 0$,

e) $3y'' - 2y' - 8y = 0$,

f) $y'' + y = 0$,

g) $y'' + 6y' + 13y = 0$,

h) $4y'' - 8y' + 5y = 0$,

i) $y'' - 2y' + y = 0$.

Řešení. **a)** $y = c_1e^x + c_2e^{-2x}$, **b)** $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$, **c)** $y = c_1e^{4x} + c_2$, **d)** $y = c_1e^{(1+\sqrt{2})x} + c_2e^{(1-\sqrt{2})x}$, **e)** $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-\frac{4}{3}x}$, **f)** $y = c_1\cos x + c_2\sin x$, **g)** $y = e^{-3x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$, **h)** $y = e^x(c_1\cos\frac{1}{2}x + c_2\sin\frac{1}{2}x)$, **i)** $y = e^x(c_1 + c_2x)$.

5.203. Najděte řešení těchto počátečních úloh:

a) $y'' - 4y' + 3y = 0$,
$y(0) = 6,\ y'(0) = 10$,

b) $y'' + 4y' + 29y = 0$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 15$,

c) $4y'' + 4y' + y = 0$,
$y(0) = 2,\ y'(0) = 0$.

Řešení. **a)** $y = 4e^x + 2e^{3x}$, **b)** $y = 3e^{-2x}\sin 5x$, **c)** $y = e^{-\frac{1}{2}x}(2 + x)$.

5.204. Najděte obecná řešení nehomogenních rovnic:

a) $2y'' + y' - y = 2e^x$,

b) (a je zadané nenulové číslo z R) $y'' + a^2 y = e^x$,

c) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$,

d) $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$,

e) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$,

f) $y'' - 2y' + 2y = 2x$.

Řešení. **a)** $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + e^x$, **b)** $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + e^x/(a^2+1)$, **c)** $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^x + \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x$, **d)** $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x$, **e)** $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$, **f)** $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x + 1$.

5.205. Najděte obecné řešení rovnice
$$y'' - 3y' + 2y = f(x)$$
s funkcí f danou vztahem

a) $f(x) = 10e^{-x}$.

b) $f(x) = 3e^{2x}$.

c) $f(x) = 2\sin x$.

d) $f(x) = 2e^x \cos \frac{1}{2}x$.

e) $f(x) = e^x(3 - 4x)$.

Řešení. Obecné řešení je dáno jako součet $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ a partikulárního řešení (kterým může být) **a)** $\frac{5}{3}e^{-x}$, **b)** $3xe^{2x}$, **c)** $\frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$, **d)** $-\frac{8}{5}e^x(\cos\frac{1}{2}x + 2\sin\frac{1}{2}x)$, **e)** $e^x(2x^2 + x)$.

5.206. Najděte obecné řešení rovnice
$$y'' - 4y' + 4y = f(x)$$
s funkcí f danou vztahem

a) $f(x) = 1$.

b) $f(x) = e^{-x}$.

c) $f(x) = 3e^{2x}$.

d) $f(x) = 2(x + \sin 2x)$.

Řešení. Obecné řešení je součtem $(c_1 + c_2 x)e^{2x}$ a partikulárního řešení (kterým může být) **a)** $\frac{1}{4}$, **b)** $\frac{1}{9}e^{-x}$, **c)** $\frac{3}{2}x^2 e^{2x}$, **d)** $\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

5.207. Najděte obecné řešení rovnice
$$y'' + y = f(x)$$
s funkcí f danou vztahem

a) $f(x) = 2x^3 - x + 2$.

b) $f(x) = -8\cos 3x$.

c) $f(x) = \cos x$.

d) $f(x) = \sin x - 2e^{-x}$.

Řešení. Obecné řešení je dáno jako součet $c_1 \sin x + c_2 \cos x$ a partikulárního řešení (kterým může být) **a)** $2x^3 - 13x + 2$, **b)** $\cos 3x$, **c)** $\frac{1}{2}x\sin x$, **d)** $-\frac{1}{2}x\cos x - e^{-x}$.

5.208. Najděte obecné řešení této rovnice
$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}.$$

Řešení. Obecné řešení má tvar $e^x\big(c_1 + c_2 x - \ln\sqrt{x^2+1} + x \operatorname{arctg} x\big)$.

5.3. Použití diferenciálních rovnic

5.301. Aplikace vedoucí na diferenciální rovnice prvního řádu:

a) Najděte křivku, která prochází bodem $[1, 1]$ a má tu vlastnost že „úsek tečny mezi osami x a y“ je půlen dotykovým bodem.

b) Určete závislost objemu vody v nádobě na čase, když voda vytéká z nádoby otvorem o průřezu S rychlostí určenou Torricelliho vztahem $v = \sqrt{2gh}$. Zde g je gravitační zrychlení a h je výška vody v nádobě.

c) V nádobě je L litrů roztoku obsahujícího M kg rozpuštěné látky. Do nádoby za minutu přitéká v_1 litrů vody a odtéká v_2 litrů roztoku. Určete závislost koncentrace látky na čase, jestliže se předpokládá okamžité a dokonalé promíchávání roztoku a $v_1 = v_2$.

d) Stejně jako v úloze předchozí, když přitéká roztok konstantní koncentrace C.

5.302. Aplikace vedoucí na diferenciální rovnice druhého řádu:

a) Najděte dráhu při rovnoměrně zrychleném pohybu, je-li dána poloha a rychlost v čase 0.

b) Netlumený harmonický pohyb na vodorovné přímce. Tlumený harmonický pohyb na vodorovné přímce.

5.4. Ještě několik úloh

5.401. Rovnice prvního řádu:

a) izokliny:

$$y' = \frac{y}{x}\ ,\ y' = x^2 + y^2\ ;$$

odřekněte si pokušení druhou rovnici řešit kvadraturami;

b) separace proměnných:

$$y' = y\ ,\ y' = 2x\sqrt{y}\ ,$$
$$y' = \sqrt[3]{y^2}\ ,$$
$$y' = \frac{x}{1+x^2}(y-1)\ ,$$
$$y' = 2x(y+1)\ ,\ y' = \frac{1-x^2}{2xy}\ ,$$
$$xy' + y = y^2\ ;$$

c) poslední příklad řešte také jako Bernoulliovu rovnici;

d) rovnice, kde derivace hledané funkce je rovna funkci s argumentem y/x:

$$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}\ ,\ y' = \exp\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}\ .$$

e) Sestavte diferenciální rovnici pro rovnici křivky, jejíž libovolná tečna protíná osu y v bodě stejně vzdáleném od bodu dotyku jako od počátku.

Řešení. Diferenciální rovnice je

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}\ ,$$

a její řešení je

$$y^2 + x^2 = cx\ ,\ y \neq 0\ .$$

Tato soustava křivek je tvořena kružnicemi se středy na ose x, které procházejí počátkem souřadnic – vyjmuty jsou body ležící na ose x.

f) Rovnici

$$y' = \frac{\sqrt{y^2+x^2}+y}{x}\ ,$$

řešte na intervalu $(0,\infty)$ a potom na intervalu $(-\infty,0)$.

Řešení. $y(x) = \frac{c}{2}x^2 - \frac{1}{2c}$, $c > 0$ (resp. $c < 0$) pro $x > 0$ (resp. $x < 0$).

5.402. Rovnice typu

$$y' = f\left(\frac{ax+bx+c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)\ :$$

a) $\quad y' = \sqrt{x-y+1}\ ,\ y(1) = 1\ .$

b) $\quad y' = \sqrt{x-y+1}\ ,\ y(1) = 0;$

c) $\quad y' = \dfrac{y+x-2}{y-x-4}\ .$

Řešení. a) $y(x) = x$, c) $x^2 - y^2 - 4x + 8y + 2xy = c$.

5.403. Lineární rovnice

a) $\quad y' + 2xy = 2x^2 + 1\ ,$

b) $\quad y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1\ ,$

c) $\quad y' - 2xy = x + x^3\ ,$

d) $\quad y' + y\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\cos x}\ ,$

e) $\quad \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{x}{t} = t\cos t\ ,$

f) $\quad y' + \mathrm{e}^x\, y = \mathrm{e}^{2x}\ ,$

g) $\quad y' + y = \cos x\ ,$

h) $\quad y' - \dfrac{y}{x} = x\ ,$

i) $\quad y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ s počáteční podmínkou $y(a) = b$ pro $a \neq 0$,

j) $\quad \dot{x} - \dfrac{x}{t} = -\dfrac{t}{1+t^2}\ ,\ x(1) = -\frac{1}{4}\pi\ ,$

k) $\quad y' - \dfrac{y}{1-x^2} = 1 + x\ ,\ y(0) = 0\ .$

5.404. Řešte – za předpokladu, že nádoba má neomezený objem – znovu úlohu 5.301.d pro případ, že rychlosti v_1 a v_2 jsou různé.

5.405. Určete rychlost částice o hmotnosti m usazující se v suspensi vlivem gravitační síly, jestliže odpor prostředí je přímo úměrný rychlosti částice.

5.406. Kovová kulička – zahřátá na teplotu T_0 – je v čase $t = 0$ umístěna do prostředí, jež je udržováno na stálé teplotě T_1, $T_1 < T_0$. Vypočítejte, za jak dlouho se kulička ochladí na teplotu T_2 , $T_1 \leq T_2 < T_0$.

5.407. Za „krátký“ čas Δt se z jistého množství m radioaktivní látky rozpadne množství Δm . Je známo, že

$$\frac{1}{m}\frac{\Delta m}{\Delta t} \doteq \lambda\ ,\ \lambda > 0\ , \text{konstanta.}$$

Vztah je tím přesnější, čím kratší je čas Δt . Odvoďte diferenciální rovnici pro závislost

$m(t)$ na čase t. Vyřešte ji a najděte vztah mezi λ a poločasem rozpadu.

Řešení. Platí
$$\frac{m(t+\Delta t)-m(t)}{\Delta t} \doteq -\lambda m(t)\ .$$
Limitní přechod ($\Delta t \to 0+$) vede k rovnici
$$m'(t) = -\lambda m(t)\ .$$
Řešením této diferenciální rovnice dostaneme pro množství látky $m(t)$ v čase t vztah
$$m(t) = m_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\ , \qquad (*)$$
kde m_0 představuje množství v čase $t=0$. Pro poločas rozpadu $T_{\frac{1}{2}}$ platí
$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}\ .$$

5.408. Bernoulliovy rovnice

a) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0\,,$

b) $xy' + y = y^2 \ln x\,.$

5.5. Soustavy diferenciálních rovnic

5.501. Konstrukci řešení soustavy lineárních homogenních diferenciálních rovnic, zmíněnou v 1.901, lze někdy velmi výhodně provést pomocí pojmů zavedených v sekci 1.8. Hledejme tedy sloupcový vektor
$$\vec{x}(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$$
funkcí definovaných na R, které splňují
$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)\ ,\ \vec{x}(0) = \vec{p}, \qquad (*)$$
kde A je matice typu (n,n) s konstantními koeficienty, $\vec{p} = (p_1,\ldots,p_n)^T$ je zadaný vektor z R_n.

5.502. Buď A diagonální matice tvořená elementy $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Najděte řešení splňující $(*)$.

Řešení. Hledané řešení je vektor
$$\vec{x}(t) = \Lambda(t)\vec{p},$$
kde $\Lambda(t)$ je diagonální matice tvořená prvky $e^{\lambda_1 t},\ldots,e^{\lambda_n t}$.

5.503. Buďte $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ vlastní čísla matice A a $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ příslušné vlastní vektory. Předpokládejme, že matice V, jejíž sloupce jsou tvořeny vektory $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$, splňuje
$$\det(V) \neq 0.$$
Najděte řešení $(*)$.

Řešení. Pro libovolné konstanty $c_1,\ldots,c_n$ je vztahem
$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n$$
dáno řešení systému rovnic $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Jestliže konstanty $c_1,\ldots,c_n$ splňují
$$c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{p},$$
dostáváme řešení $(*)$. Označíme-li $\vec{c}$ sloupcový vektor sestavený z prvků $c_1,\ldots,c_n$, je poslední vztah ekvivalentní s $V\vec{c} = \vec{p}$. Vektor $\vec{c}$ je dán vztahem $\vec{c} = V^{-1}\vec{p}$.

5.504. Použijte 1.801.d a najděte řešení $(*)$ pro
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Obecné řešení je
$$\vec{x}(t) = c_1 e^{7t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$
Je třeba nalézt c_1 a c_2 tak, že
$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
Tomu vyhovují $c_1 = 2$ a $c_2 = 1$. Řešení $x(t)$ je proto tvořeno funkcemi
$$x_1(t) = 2e^{7t} + 4e^{-2t},$$
$$x_2(t) = 2e^{7t} - 5e^{-2t}.$$

5.505. S pomocí 1.802.a najděte řešení $(*)$, kde
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 12 \\ 4 & -15 & 26 \\ 2 & -7 & 12 \end{pmatrix},\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Řešení je dáno funkcemi
$$x_1(t) = 6e^{4t} - 6e^{-t} + 3e^{-4t},$$
$$x_2(t) = 4e^{4t} + 2e^{-t} - 6e^{-4t},$$
$$x_3(t) = 2e^{4t} + 2e^{-t} - 3e^{-4t}.$$

5.506. Sestrojte řešení $(*)$ v případě, že
$$A = VDV^{-1},$$
kde D je diagonální matice vytvořená elementy $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

Řešení. Buď $\Lambda(t)$ je diagonální matice tvořená prvky $e^{\lambda_1 t},\ldots,e^{\lambda_n t}$. Zavedeme novou proměnnou $\vec{y}(t) \equiv V^{-1}\,x(t)$ a snadno odvodíme, že $y(t)$ musí být řešením problému

$$\dot{\vec{y}}(t) = D\vec{y}(t)\ ,\ \vec{y}(0) = V^{-1}\vec{p}.$$

Podle 5.502 dostáváme

$$\vec{y}(t) = \Lambda(t)V^{-1}\vec{p}\ .$$

Poněvadž $\vec{x}(t) = V\vec{y}(t)$, odvodíme okamžitě, že řešení je dáno vztahem

$$\vec{x}(t) = V\Lambda(t)\,V^{-1}\vec{p}.$$

5.507. Pro každou ze zadaných matic najděte řešení soustavy

$$\vec{x}' = A\,\vec{x} \qquad (*)$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}(t) = A\,\vec{x}(t),$$

s počátečními podmíkami

$$x_1(0) = 3,\ x_2(0) = -2.$$

Dále pro každou soustavu rovnic sestavte matici $S(t)$, jejíž první sloupec je tvořen řešením soustavy $(*)$, které splňuje počáteční podmínku

$$x_1(0) = 1\,,\ \ x_2(0) = 0$$

a druhý sloupec je tvořen řešením soustavy $(*)$, které splňuje počáteční podmínku

$$x_1(0) = 0\,,\ \ x_2(0) = 1.$$

Matice A jsou zadány takto:

a) $$A = \begin{pmatrix} -11 & 24 \\ -4 & 9 \end{pmatrix},$$

b) $$A = \begin{pmatrix} 13 & -10 \\ 15 & -12 \end{pmatrix},$$

c) $$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

d) $$A = \begin{pmatrix} 15 & -9 \\ 30 & -18 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

a) $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 21e^{-3t} - 18e^{t} \\ 7e^{-3t} - 9e^{t} \end{pmatrix},$$

$$S(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-3t} - 2e^{t} & -6e^{-3t} + 6e^{t} \\ e^{-3t} - e^{t} & -2e^{-3t} + 3e^{t} \end{pmatrix},$$

b) $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -10e^{-2t} + 13e^{3t} \\ -15e^{-2t} + 13e^{3t} \end{pmatrix},$$

$$S(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{3t} & 2e^{-2t} - 2e^{3t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{3t} & 3e^{-2t} - 2e^{3t} \end{pmatrix},$$

c) $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -12 + 15e^{2t} \\ -12 + 10e^{2t} \end{pmatrix},$$

$$S(t) = \begin{pmatrix} -2 + 3e^{2t} & 3 - 3e^{2t} \\ -2 + 2e^{2t} & 3 - 2e^{2t} \end{pmatrix},$$

d) $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 24 - 21e^{-3t} \\ 40 - 42e^{-3t} \end{pmatrix},$$

$$S(t) = \begin{pmatrix} 6 - 5e^{-3t} & -3 + 3e^{-3t} \\ 10 - 10e^{-3t} & -5 + 6e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

6.1. Příklady nevlastních integrálů

6.101. Nevlastní integrál jako výraz pro délku polokružnice vyjádřené ve tvaru

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}\ , x \in \langle -R, R\rangle.$$

6.102. Z definice:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx\,, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx\,,$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx\,, \quad \int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx\,,\ a>0$$

$$\int_0^\infty \sin x\ dx\,, \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\ dx\,,$$

$$\int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx\,,$$

6.103. Z definice:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,, \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,,$$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx\,, \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$

za předpokladu, že $a < b$ a p je libovolné reálné číslo,

$$\int_0^1 \ln x\ dx\,,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,, \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx\,,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx\,, \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx\,.$$

6.104. Aplikace kriterií konvergence (i když některé integrály lze vypočítat):

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\ dx\,, \qquad \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx\,,$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x+x^2}\,dx\,, \int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\,dx\,,$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2-x+1}\,dx\,, \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx\,, \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

6.105. Absolutní konvergence:

$$\int_1^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\ dx\,,\ a>0\,,$$

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx\,,$$

6.106. Konvergence (integrací per partes)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\,\sin x\ \ dx\,.$$

6.107. Konvergence (substitucí)

$$\int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx\,.$$

6.108. Neabsolutní konvergence

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,,\ a>0\ ,$$

(užitím integrace per partes).

6.2. Úlohy ke cvičení

6.201. Vypočítejte nevlastní integrály (nebo ukažte, že divergují):

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,,$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\ dx\,, \quad a>0\ ,$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,dx\,,$

e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx\,,$

f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\,dx\,,$

g) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx\,,$

h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx\,,$

i) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx\,,$

j) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx\,.$

Řešení. a) $\frac{1}{3}$, **b)** div., **c)** $\frac{1}{a}$, **d)** div., **e)** $\frac{1}{2}$, **f)** $\frac{1}{2}$, **g)** div., **h)** π , **i)** $\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\ln 2$, **j)** $\frac{1}{2}\pi$.

6.202. Jako v předchozí úloze:

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\ln x\,dx\,,$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx\,,$

e) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x\ln x}\,dx\,,$

f) $\displaystyle\int_{0}^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx\,,$

g) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx\,,$

h) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx\,,$

i) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x\,dx\,,$

j) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1-\cos^2 x}\,dx\,.$

Řešení. a) $\frac{1}{2}\pi$, **b)** $-\frac{1}{4}$, **c)** $\frac{8}{3}$, **d)** div., **e)** div., **f)** 1 , **g)** $\frac{1}{2}\pi+1$, **h)** $\frac{5}{2}$, **i)** -1 , **j)** div.

6.203. Rozhodněte o jejich konvergenci (resp. divergenci) těchto integrálů:

a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx\,,$

c) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx\,,$

e) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx\,,$

f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx\,,$

g) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx\,,$

h) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x}\,dx\,.$

Řešení. a) kon., **b)** div., **c)** div., **d)** kon. abs., **e)** kon., **f)** kon., **g)** div., **h)** div.

6.204. Jako v předchozí úloze:

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx\,,$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{1+\cos x}\,dx\,,$

e) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)^3}}\,dx\,,$

f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,,$

g) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx\,,$

h) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^{x}-2}{\sqrt{x^3}}\,dx\,.$

Řešení. **a)** kon., **b)** kon., **c)** kon., **d)** div., **e)** div., **f)** kon., **g)** kon., **h)** div.

6.3. Tři poznámky

6.301. Odvoďte výraz pro veličinu τ, která bude označovat průměrnou (střední) délku života atomu radioaktivní látky.

Řešení. (Číslo $\lambda\Delta t$, λ z úlohy 5.407, lze chápat jako pravděpodobnost jevu, že se daný atom rozpadne během časového intervalu délky Δt. Má tedy smysl mluvit o délce života jako o střední hodnotě statistické veličiny.) V čase t předpokládáme $m(t)$ látky, v čase $t = 0$ pro množství látky $m(0)$ použijeme označení m_0 . V intervalu $(t, t + \Delta t)$ se rozpadlo množství vyjádřitelné jako

$$m(t) - m(t + \Delta t) \doteq -m'(t)\Delta t \,.$$

Výsledný výraz tedy bude

$$\tau = \frac{1}{m_0} \int_0^\infty t\left(-m'(t)\right) dt \,.$$

Podle 5.407

$$m(t) = m_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,,$$

a proto

$$\tau = \lambda \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}\,. \qquad (*)$$

Integrací *per partes* spočítáme, že střední doba života atomu radioaktivní látky je rovna $1/\lambda$.

6.302. K výpočtu integrálu v 6.301 $(*)$ jsme použili integrace per partes. Zmíníme se o jiné metodě (jejíž teoretické opodstatnění neuvedeme), která se opírá o dva způsoby vyjádření derivace funkce Φ, kterou zadáme tímto vztahem:

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt \ \text{ pro } \lambda > 0\,.$$

(Pro $\lambda \le 0$ integrál diverguje.) Na intervalu $(0, \infty)$ spočítáme Φ', první derivaci Φ podle proměnné λ, tak, že derivujeme za integrálním znamením a na proměnnou x hledíme jako na konstantu. Dostaneme

$$\Phi'(\lambda) = -\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt\,.$$

Hodnota $\Phi(\lambda)$ se však snadno spočítá, je

$$\Phi(\lambda) = 1/\lambda\,.$$

Proto

$$\Phi'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Porovnáním posledních dvou vztahů dostaneme

$$\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda^2} \ \text{ pro } \lambda > 0\,.$$

Kolik je

$$\int_0^\infty t^p\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt$$

pro $p = 2, 3, \ldots$ a $\lambda > 0$?

6.303. Ještě jednou 5.407. Při řešení 6.301 jsme vyložili, že z množství m látky zůstane po („velmi krátkém“) čase Δt pouze

$$m - m\lambda\Delta t = m(1 - \lambda\Delta t).$$

Rozdělíme-li časový interval $\langle 0, t\rangle$ na n úseků délky $\Delta t = t/n$, vidíme snadno, že z množství m_0, které jsme měli v čase $t = 0$, zůstane po čase t pouze

$$m_0\left(1 - \lambda\Delta t\right)^n.$$

Dosadíme za Δt a limita $n \to +\infty$ dává

$$m(t) = m_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,.$$

To je další odvození vztahu (5.407)$(*)$.

6.4. Limity posloupností

6.401. Základní pojmy:

- z definice dokázat, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,,\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty\,;$$

- limita vybrané posloupnosti:

$$\left\{(-2)^n\right\}_{n=0}^\infty \ \text{ nemá limitu;}$$

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ $(a \in R, \pm\infty)$ implikuje $\lim_{n\to\infty} f(n) = a$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 1}{4n^2 + n + 2}\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,, \quad \lim_{n\to\infty} x^n\,, x > 0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right);$$

• užitím odhadu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!},$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right),$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right).$$

6.402. Z definice dokažte:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\,,\quad \lim_{n\to\infty}n^3=+\infty\,.$$

6.403. Vyšetřete použitím limit vybraných posloupností:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}\quad \text{pro } a<0\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n\,.$$

6.404. Spočítejte

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}\quad \text{pro } a>0\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n},\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}\,,a>0\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n+1}{n^2}\right),$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+1}-\frac{n}{2}\right),$$

limitu posloupnosti, jejíž n-tý člen a_n je dán konečným součtem

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\,.$$

6.405. Spočítejte použitím věty o limitě sevřené posloupnosti limity posloupností

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n},$$

a dále limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}a_n\,,$$

kde

a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{1,\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{3}{6},\ldots\}$,

b) $a_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$.

6.5. Nekonečné číselné řady

6.501. Základní pojmy pro číselné řady:

• definice součtu řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n\,,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\,,\sum_{n=1}^{\infty}n\,,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n};$$

• nutná podmínka konvergence řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}\,,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)};$$

• integrální kriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\,,\alpha>0\,,\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n};$$

• srovnávací kriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\,,\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\,,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\,,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!};$$

○ limitní srovnávací kriterium:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\sqrt{n}}{n^3+n+10}\,,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^4}+5}\,,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}};$$

• Cauchyovo limitní kriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\,,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}\,,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}\,,$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}\,,\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;$$

○ kriterium nedává výsledek pro

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};$$

• D'Alembertovo (limitní) kriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\,,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\,,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \quad , a > 0\, , ;$$

- absolutní konvergence:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\, , a \in R \ , \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}\, , a \in R \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}\, , x \in R\, , \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \ ;$$

- Leibnizovo kriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \ , \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \ ;$$

∘ příklad shrnující užití různých metod

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \ .$$

6.502. Pomocí srovnávacího kriteria rozhodněte o konvergenci či divergenci řad

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$, **d)** $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$, **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$.

Řešení. **a)** kon., **b)** div., **c)** div., **d)** kon., **e)** kon., **f)** div.

6.503. S pomocí D'Alembertova limitního kriteria rozhodněte o konvergenci či divergenci těchto řad

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$, **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$, **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)}{n^n}$, **h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

Řešení. **a)** kon., **b)** kon., **c)** kon., **d)** div., **e)** kon., **f)** kon., **g)** kon., **h)** kon.

6.504. Užijte Cauchyovo limitní kriterium a rozhodněte o konvergenci či divergenci těchto řad

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2n}{n+1}\Big)^n$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n}{3n-1}\Big)^{2n-1}$, **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\mathrm{e}^n}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n}$, **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$, **h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$.

Řešení. **a)** kon., **b)** div., **c)** kon., **d)** kon., **e)** kon., **f)** kon., **g)** div., **h)** kon.

6.505. Užijte integrálního kriteria a rozhodněte o konvergenci či divergenci těchto řad

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$, **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1+n}{1+n^2}\Big)^2$,

e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$.

Řešení.
a) kon., **b)** kon., **c)** kon., **d)** kon., **e)** div.

6.506. Pomocí Leibnizova kriteria rozhodněte o konvergenci či divergenci těchto řad

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(2n+1)}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}\,.$

Řešení. **a)** kon., **b)** kon., **c)** kon., **d)** kon.

6.507. Rozhodněte o konvergenci či divergenci těchto řad; pokud konvergují, určete, zda konvergují absolutně či neabsolutně

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{10^n}{n!}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n+\frac{\pi}{n})$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$, **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n-\ln n}\,.$

Řešení. **a)** kon. abs., **b)** div. **c)** kon. neabs, **d)** kon. abs., **e)** kon. neabs.

6.6. Funkční řady

6.601. Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(1+nx^2)}\,,$$

konverguje stejnoměrně na R.

6.602. Najděte obory konvergence těchto funkčních řad

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$, **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{e}^{-nx}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$, **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin nx\,.$

Řešení. **a)** $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, **b)** $\langle -1,1\rangle$, **c)** $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, **d)** $(0,\infty)$, **e)** $(-1,1)$, **f)** $(-\infty,+\infty)$.

6.603. Dokažte, že dané funkční řady konvergují stejnoměrně v daných intevalech

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^4+n^2}\,,\ x\in(-\infty,\infty)\,,$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}\,,\ x\in(-\infty,\infty)\,,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}\,,\quad x\in R\,,$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^2\,\mathrm{e}^{-nx}\,,\ x\in\langle 0,\infty)\,.$

6.604. Najděte obory konvergence daných mocninných řad (pokud řada konverguje v nějakém krajním bodě intervalu konvergence, rozhodněte, zda jde o konvergenci absolutní nebo neabsolutní)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^n$, **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n!)x^n$, **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3^{n+1}}x^n$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)\,x^n}{n^n}$, **h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n+1}$,

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x+3)^n$, **j)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}\,x^n$,

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$, **l)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^n}$,

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^n\,.$

Řešení.

a) $\langle -1,1\rangle$, $x=-1\,,x=1$ konver. abs., **b)** R, **c)** $(-1,1)$, **d)** $\langle -1,1\rangle$, $x=-1\,,x=1$ konver. abs., **e)** $\{0\}$, **f)** $(-3,3)$, **g)** $(-\mathrm{e},\mathrm{e})$, **h)** $\langle -1,1\rangle$, $x=\pm 1$ konver. neabs., **i)** $\{-3\}$, **j)** $\langle -1,1)$, $x=-1$ konver. neabs., **k)** $(-2,2)$, **l)** R, **m)** $(-1,1)$.

6.7. Mocninné řady, Taylorova a Maclaurinova řada

6.701. Zadanou funkci vyjádřete jako součet mocninné řady se středem v bodě x_0, když

a) $f(x) = 2x^3 - 7x + 2,\ x_0 = 1,$

b) $g(x) = 2 - 3x^2 - 2x^3 - x^4,\ x_0 = -1.$

Řešení.

a) $f(x) = 2(x-1)^3 + 6(x-1)^2 - (x-1) - 3,$

b) $g(x) = -(x+1)^4 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1).$

6.702. a) V okolí bodu $x = 0$ vyjádřete jako součet mocninné řady primitivní funkci k funkci f definované vztahem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} & \text{pro } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{pro } x = 0\,. \end{cases}$$

b) Vypočítejte

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x+1)}{x}\,dx$$

s maximální chybou 10^{-3}.

Řešení. a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\,,$

b) $\doteq \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{72} - \frac{1}{256} + \frac{1}{800} \doteq 0{,}449\,.$

6.703. Najděte primitivní funkce k daným funkcím ve tvaru mocninných řad:

a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{pro } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{pro } x = 0\,. \end{cases}$$

b) $$g(x) = \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^x \text{ pro } x \neq 0\,,$$

c) $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{pro } x \in (-1,1) - \{0\}\,, \\ 1 & \text{pro } x = 0\,. \end{cases}$$

Řešení.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\,,$

b) $\displaystyle\ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}\,,$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\,.$

6.704. Najděte Maclaurinovy řady daných funkcí a určete, pro které hodnoty x jsou součty řad rovny daným funkcím:

a) $f(x) = \sqrt{1+x}\,,$

b) $g(x) = \arcsin x\,,$

c) $h(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}\,.$

Řešení.

a) pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ platí $f(x) =$

$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \ldots\,,$

b) pro $x \in (-1,1)$ platí $g(x) =$

$x + \frac{1}{2}\frac{1}{3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{7}x^7 + \ldots\,,$

c) pro $x \in R$ platí

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^{n+1}\,.$$

6.705.

a) S jakou přesností platí přibližná formule $\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$.

b) Vypočítejte s přesností 10^{-3} následující hodnoty:

e^{-1} , $\ln 1{,}2$, $\cos 5°$, $\sqrt{0{,}997}$.

c) Najděte intervaly proměnné x, v nichž následující přibližné vzorce platí s přesností 10^{-3} :

$\sin x \doteq x$,

$\ln(1+x) \doteq x - \frac{1}{2}x^2$.

Řešení.

a) $7 \cdot 10^{-2}$, **b)** $0{,}368\,,\ 0{,}182\,,\ 0{,}996\,,\ 0{,}998\,.$
c) $x \in (-0{,}18; 0{,}18)\,,\ x \in (-0{,}12; 0{,}14)\,.$

7.1. Definiční obory a grafy.

7.101. Určete a v rovině nakreslete definiční obory funkcí (je v některých případech definiční obor množinou otevřenou nebo uzavřenou?):

a) $f(x,y) = x + \sqrt{y}$,

b) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$,

c) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$,

d) $(x,y) \to \sqrt{\big(x^2+y^2-1\big)\big(4-x^2-y^2\big)}$,

e) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2} - \sqrt{x^2-y^2-1}$,

f) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$,

g) $f(x,y) = \sqrt{\sin\left(x^2+y^2\right)}$,

h) $f(x,y) = \ln\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2}$,

i) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$,

j) $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}\ \ln(xy)$,

k) $f(x,y) = \arcsin\dfrac{y}{x}$,

l) $f(x,y) = \ln(y^2-4x+8)$,

m) $f(x,y) = \sqrt{x-\sqrt{y}}$,

n) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$,

o) $f(x,y) = \ln\big(x\ \ln(y-x)\big)$,

p) $f(x,y) = \sqrt{x\sin y}$,

q) $f(x,y) = \sqrt{\ln(xy)}$.

7.102. Ujasněte si podobu grafu funkce
$f(x,y)\ :\ D(f) \to R$
jako podmožiny (obvykle plochy) v E^3 popsané takto
$\{[x,y,z] : [x,y] \in D(f), z = f(x,y)\}$,
když

a) $f(x,y) = x$, $f(x,y) = -2$,

b) $f(x,y) = 2-y$,
$f(x,y) = -1+x$,

c) $f(x,y) = 1-x-y$,

d) $f(x,y) = y^2, f(x,y) = x^2+y^2$,

e) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$,
$f(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$.

f) $f(x,y) = x^2-y^2$,
$f(x,y) = 2xy$,

g) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,
$f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$.

7.2. Limity a spojitost.

7.201. Pokud limita existuje, vypočítejte ji:

a) $\displaystyle\lim_{[x,y,z]\to[2,0,-1]} \frac{2x-z}{x^2+y^2+z^2}$,

b) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[3,0]} \sin\frac{(x-3)y}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}$,

c) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} (x^2+y^2)\ \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

d) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,4]} \sqrt{2x+y}$,

e) $\displaystyle\lim_{[x,y,z]\to[1,1,2]} \frac{1}{x+y-z}$,

f) (limita vzhledem k množině) pro $M = \{[x,y,z] \in R^3 : z > x+y\}$ vyšetřit

$$\lim_{\substack{[x,y,z]\to\\ \to[1,1,2]\,,\\ [x,y,z]\in M}} \frac{1}{x+y-z}\,,$$

g) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,1]} \arcsin\dfrac{1}{x-y}\,,$

h) $\lim\limits_{\substack{[x,y]\to\\ \to[0,0]}} (x+y)\,\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\,,$

i) $\lim\limits_{\substack{[x,y]\to\\ \to[0,1]}} \dfrac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}\,.$

Řešení. **a)** 1 , **b)** 0 , **c)** 0 , **d)** 2 , **e)** funkce není definovaná v žádném prstencovém okolí bodu, v němž se limita vyšetřuje , **f)** $-\infty$, **g)** jako v e), **h)** jako v e), **i)** $\frac{1}{2}$.

7.202. Jako výše:

a) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x-y}{x+y}\,,$

b) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{1}{x^2+y^2}\,,$

c) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}\,,$

d) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x+y}{x^3+y^3}\,,$

e) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x+y}{x^4+y^4}\,.$

f) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^4-y^4}{x-y}\,.$

Řešení. **a)** funkce není definovaná v žádném prstencovém okolí bodu, v němž se limita vyšetřuje , **b)** ∞ , **c)** neex., **d)** jako v a), **e)** neex., **f)** jako v a).

7.203. Dokažte, že na R^2 jsou spojité tyto funkce:

a) $h(x,y) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]\,, \end{cases}$$

b) $k(x,y) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]\,. \end{cases}$$

7.204. Dokažte, že funkce

$m(x,y) = \sqrt{xy-1}$

je spojitá v bodě $[1,1]$ vzhledem ke $D(f)$.

7.205. Dokažte, že funkce

$h(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x^2-y}$

je spojitá na $D(h)$.

7.206.a) Buď funkce f dána takto

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(1+\sin x)}{(x-y)^2+(x+y)^2}\,.$$

Rozhodněte, zda existuje funkce F spojitá na R^2 taková, že

$F(x,y) = f(x,y)$

pro $[x,y] \in D(f)$.

b) Rozhodněte, zda funkce

$h(x,y) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]\,, \end{cases}$$

je spojitá v bodě $[x,y] = [0,0]$.

Řešení. **a)** ano, **b)** ne.

7.207. Dokažte, že funkce

$f(x,y) =$

$$= \begin{cases} 2x-y+3 & \text{pro } [x,y] \neq [1,1] \\ 2 & \text{pro } [x,y] = [1,1]\,, \end{cases}$$

není spojitá v bodě $[x,y] = [1,1]$. Jak je třeba změnit funkční hodnotu $f(1,1)$, aby se f stala spojitou v bodě $[1,1]$.

7.208. Určete, zda uvedené funkce jsou na svém definičním oboru spojité:

a) $f(x,y) = \sin(x+y^2)$,

b) $g(x,y) = \ln \dfrac{1}{x-y}$,

c) $h(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

7.3. Parciální derivace.

7.301. Spočítejte parciální derivace prvního řádu (u jednodušších funkcí i vyšších řádů) podle všech proměnných:

a) $f(x,y) = x - y$,

b) $f(x,y) = x^3y - xy^3$,

c) $g(u,v) = \dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u}$,

d) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$,

e) $k(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$,

f) $g(x,y) = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$,

g) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}$

h) $f(x,y) = \ln(x + \ln y)$,

i) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{x-y}$,

j) $f(x,y) = \big(1+xy\big)^y$,

7.302. Jako v úloze 7.301.:

a) $f(x,y,z) = xyz$,

b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

c) $f(x,y,z) =$
$= x^3 + yz^2 + 3xy - x + z$,

d) $f(x,y,z,v) =$
$= xyz + yzv + zvx + vxy$,

e) $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x(x^2+y^2+z^2)}$,

f) $f(x,y,z) = \sin(x^2+y^2+z^2)$,

g) $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$,

h) $f(x,y,z) = x^{y^z}$.

7.303. Najděte definiční obor, zjistěte, zda je funkce omezená shora, zda je omezená zdola, a spočítejte všechny derivace prvního a druhého řádu:

a) $f(x,y) = 2x^2y - 3(x^2-1)y^2 + 2x$

Řešení. $D(f) = E^2$, funkce není omezena zdola ani shora,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6xy^2 + 4xy + 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 - 6x^2y + 6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4y - 6y^2 \ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4x - 12xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6 - 6x^2.$$

b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2y^3} \equiv \exp(x^2y^3)$

Řešení. $D(f) = E^2$, funkce je omezená zdola nulou, není omezená shora,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3\mathrm{e}^{x^2y^3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2\mathrm{e}^{x^2y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^3(1+2x^2y^3)\mathrm{e}^{x^2y^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6xy^2(1+x^2y^3)\mathrm{e}^{x^2y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 3x^2y(2+3x^2y^3)\mathrm{e}^{x^2y^3}.$$

c) $f(x,y) = x^2y^3 - \sin(x^2y^3)$

Řešení. $D(f) = E^2$, funkce není omezena zdola ani shora,

$f_x(x,y) = 2xy^3(1-\cos(x^2y^3))$,

$f_y(x,y) = 3x^2y^2(1-\cos(x^2y^3))$,

$f_{xx} = 2y^3(1-\cos(x^2y^3)) + 4x^2y^6\sin(x^2y^3)$,

$f_{xy} = 6xy^2(1-\cos(x^2y^3)) + 6x^3y^5\sin(x^2y^3)$,

$f_{yy} = 6x^2y(1-\cos(x^2y^3)) + 9x^4y^4\sin(x^2y^3)$.

d) $f(x,y) = \ln(x^2-2x-y)$

Řešení. $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y < (x-1)^2 - 1\}$, funkce není omezená zdola ani shora,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2(x-1)}{x^2-2x-y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{x^2-2x-y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2(x^2-2x+y+2)}{(x^2-2x-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2(x-1)}{(x^2-2x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-1}{(x^2-2x-y)^2}.$$

e) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+y}}$

Řešení. $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y > -x^3\}$,

funkce je omezená zdola hodnotou nula, shora omezená není,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-3x^2}{2(x^3+y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{2(x^3+y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{3x(5x^3-4y))}{4(x^3+y)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{9x^2}{4(x^3+y)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{3}{4(x^3+y)^{\frac{5}{2}}}.$$

f) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$

Řešení. $D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y \neq 0\}$,

funkce je není omezena zdola ani shora,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x+y}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{x+2y}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-x(x+2y)}{y^3}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2(x+2y)}{y^4}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}.$$

7.304. Pro funkci f danou vztahem

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x(\cos y + x\sin y)$$

dokažte, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

7.305. Pro funkci g danou vztahem

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

dokažte, že

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}.$$

7.306. Pro dané funkce spočítejte všechny parciální derivace druhého řádu

a) $f(x,y) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$,

b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$,

c) $f(x,y) = e^{xe^y}$.

7.307. Pro funkci f danou vztahem

$$f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xyz}$$

vypočítejte

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}.$$

7.308. Pro funkci f danou vztahem

$$f(x,y) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$$

dokažte, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 1\,.$$

7.309. Pro funkci f danou vztahem

$$f(x,y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

dokažte, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,.$$

Pro jaké body (x,y) to platí?

7.310. Pro funkci f danou vztahem

$$f(x,y) = \frac{y}{y^2 - a^2x^2}\,,$$

$(a > 0$, konstanta) dokažte, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.$$

Pro jaké body (x,y) je tato parciální diferenciální rovnice splněna?

7.4. Totální diferenciál.

7.401. Pro funkci f danou vztahem

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$$

najděte $\mathrm{d}f(1,1,1)$ a $\mathrm{d}^2 f(1,1,1)$.

Řešení. $\mathrm{d}f(1,1,1) = dx - dy$,
$\mathrm{d}^2 f(1,1,1) = -2(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)(\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$.

7.402. Najděte $\mathrm{d}f$ a $\mathrm{d}^2 f$ pro funkci f danou vztahem

a) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$,

b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$,

c) $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.

Řešení. a) $\mathrm{d}f = y^{-1}\mathrm{d}x - xy^{-2}\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}^2 f = -2y^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2xy^{-3}\,y^2$, **b)** $\mathrm{d}f = \mathrm{e}^{xy}(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$, $\mathrm{d}^2 f = \mathrm{e}^{xy}(y^2\mathrm{d}x^2 + 2(1+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}y^2)$, **c)** $\mathrm{d}f = (y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}^2 f = 2(\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x)$.

7.403. Ukažte, že pro malá x a y platí:

a) $\operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1+xy} \doteq x + y$,

b) $(1+x)^m(1+y)^n \doteq$,
$\doteq 1 + mx + ny$,

c) $\ln(1+x)\ \ln(1+y) \doteq xy$.

7.404. Vypočítejte přibližně:

a) $1{,}04^{2{,}02}$,

b) $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$,

c) přírůstek hodnoty funkce

$$f(x,y) = \frac{x+3y}{y-3x}$$

při přechodu od bodu $[2,4]$ do bodu $[2{,}5; 3{,}5]$.

7.5. Derivace složených funkcí.

7.501. Derivujte podle všech proměnných funkci

a) $t \to u$, když
$u = \mathrm{e}^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$,

b) $t \to z$, když
$z = \arcsin(x-y), x = 3t, y = 4t^3$,

c) $(r,\varphi) \to z$ pro $z = x^2y - xy^2$,
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

d) $(x,y) \to z$, když
$z = \operatorname{arctg} xy$, $y = \mathrm{e}^x$,

7.502. Funkce

$$(u,v,w) \to f(u,v,w)$$

má spojité parciální derivace druhého řádu na E^3. Spočítejte všechny parciální derivace druhého řádu složené funkce

$$p(x,y,z) = f(x, xy, xyz)\,.$$

Jde o derivace, které lze označit také takto:

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z,$$

$$\partial^2_{xx}, \partial^2_{yy}, \partial^2_{zz}, \partial^2_{xy}, \partial^2_{yz}, \partial^2_{yz}.$$

Řešení. Na příklad
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v} + yz\frac{\partial f}{\partial z}.$$
Derivace se také zapisuje ve tvaru
$$\frac{\partial p}{\partial x} = f_1 + yf_2 + yzf_3,$$
poněvadž lze použít značení

f_i pro první derivaci funkce f podle i-té proměnné; f_{ij} pro druhou derivaci f podle i-té a j-té proměnné. Proto např.
$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = x^2y^2f_{33}.$$

ÚMLUVA: v dalších úlohách budeme předpokládat, že všechny derivace funkcí, které potřebujeme při výpočtech, jsou spojité tam, kde to potřebujeme.

7.503. Označte vhodně proměnné funkce f a spočítejte všechny derivace 1. a 2. řádu funkcí

a) $z(x,y) = f(x^2 - y^2, \mathrm{e}^{xy})$,

b) $u(x,y) = f(x+y, xy)$,

c) $\tilde{f}(x,y,z) = f(x+y, z)$.

7.504. a) Spočítejte $\mathrm{d}f$ a $\mathrm{d}^2 f$, když
$$f(x,y) = u(ax, by),$$
kde a, b jsou konstanty; proměnné funkce u je přitom třeba označit vhodnými symboly (třeba $u = u(\xi, \eta)$).

b) Spočítejte $\mathrm{d}u$, když
$$u(x,y,z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right),$$

c) Spočítejte $\mathrm{d}g$, když
$$g(x,y) = f(x^2+y^2, y^2-x^2, xy),$$

d) Spočítejte $\mathrm{d}f$, když
$$f(t) = g(t, t^2, t^3),$$

e) Spočítejte $\mathrm{d}F$, když
$$F(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

7.505. Spočítejte hodnoty všech parciálních derivací řádů jedna a dvě funkce F v bodě $A = [3,2]$, když
$$F(x,y) = g(xy, \frac{x}{y}).$$

Řešení. Označíme-li u a v proměnné funkce g, tj. $g = g(u,v)$, je např.
$$F_{xx}(3,2) =$$
$$= 4g_{uu}(6, \tfrac{3}{2}) + 2g_{uv}(6, \tfrac{3}{2}) + \tfrac{1}{4}g_{vv}(6, \tfrac{3}{2}).$$

7.506. a) Dokažte, že funkce
$$z(u,v) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y},$$
kde
$$x = u+v, y = u-v,$$
splňuje rovnici
$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}.$$
b) Dokažte, že funkce
$$z(x,y) = \frac{y}{f(x^2-y^2)}$$
splňuje rovnici
$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$
ve všech bodech, kde f je různá od nuly.

7.6. Gradient a derivace ve směru.

7.601. Spočítejte derivaci ve směru $\vec{s}$ funkce f v bodě A:

a) $f(x,y) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$,
$A = [0,0]$, $B = [1,3]$, $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$,

b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $A = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}]$,
$\vec{s}$ je ten ze dvou tečných vektorů v bodě A ke kružnici
$$x^2+y^2-2x = 0,$$
který má druhou složku kladnou.

c) $f(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}y^2$

$A=[1,2,3]\ ,\vec{s}=(1,2,3)\,.$

7.602. Dokažte

$$\operatorname{grad}(fg)=f\operatorname{grad}g+g\operatorname{grad}f\ .$$

7.7. Transformace proměnných.

7.701. Vyjádřete v polárních souřadnicích $x=r\cos\varphi\,,y=r\sin\varphi$:

a) $x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}\,,$ **b)** $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}\,,$

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,$ **d)** $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$

e) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,.$

Řešení. a) $\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}$, **b)** $r\dfrac{\partial u}{\partial r}\,,$
c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\,,$
d) $(\dfrac{\partial u}{\partial r})^2+\dfrac{1}{r^2}(\dfrac{\partial u}{\partial\varphi})^2$, **e)** $r^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,.$

7.702. Zavedením nových proměnných

$$\xi=x\,,\eta=x^2+y^2$$

řešte rovnici

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0\,.$$

Řešení. Každá funkce z tvaru

$$z(x,y)=\phi(x^2+y^2)\,,$$

kde ϕ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce na R, vyhovuje zadané parciální diferenciální rovnici.

7.8. Tečna, tečná rovina, normála.

7.801. Najděte bod P na ploše $z=f(x,y)$, v němž je normála rovnoběžná s osou z, jestliže

a) $f(x,y)=x^2+y^2-1,$

b) $f(x,y)=2x+3y+4,$

c) $f(x,y)=2x^2-2xy+4x+6y-25.$

Řešení.
a) $P=(0,0,-1)$, **b)** takový bod P neexistuje, **c)** $P=(3,8,5)$.

7.802. V bodě P plochy $z=g(x,y)$ najděte normálu $\vec{N}_P$ a obecnou rovnici tečné roviny, jestliže

a) $g(x,y)=x^3-2y^2-18,$
$P=(3,-1,?),$

b) $g(x,y)=\ln\dfrac{x-1}{y}+2x^2-y\,,$
$P=(2,1,?)\,,$

c) $g(x,y)=3x^2-2xy^2-7y+3\,,$
$P=(2,-3,?)\,.$

Řešení.
a) $\vec{N}_P=(27,4,-1)$, $27x+4y-z-70=0$,
b) $\vec{N}_P=(9,-2,-1)$, $9x-2y-z-9=0$,
c) $\vec{N}_P=(-6,17,-1)$, $6x-17y+z-63=0$.

7.9. Extrémy funkcí.

7.901. Zjistěte, zda funkce je shora omezená (SO), zdola omezená (ZO) a najděte lokální (resp. absolutní) extrémy:

a) $f(x,y)=x^2+(y-1)^2\,,$
b) $f(x,y)=x^2-(y-1)^2\,,$
c) $f(x,y)=(x-y+1)^2\,,$
d) $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y\,,$
e) $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)\,,$
f) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy\,,$
g) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2\,.$

Řešení. a) SO: ne, abs. min. v bodě $[0,1]$,
b) ZO: ne, SO: ne, stac. bod. $[0,1]$ – v něm není extrém,
c) SO: ne, abs. min. v každém bodě přímky $y=x+1$,
d) SO: ne, abs. min.: $[1,0]$,
e) ZO: ne, SO: ne, ostré lok. max.: $[2,3]$, stac. body bez extrému: $[a,0],a\in R$ (osa x) a bod $[0,6]$, body $[0,a],a\in(0,6)$, jsou

body neostrého lok. min., body $[0,a], a \in (-\infty,0) \cup (6,\infty)$, jsou body neostrého lok. max.,
f) ZO: ne, SO: ne, stac. bod: $[0,0]$ – v něm není extrém, lok. min. v bodě $[1,1]$,
g) SO: ne, abs. min. v bodech $[1,1]$, $[-1,-1]$, stac. bod: $[0,0]$ – v něm není extrém.

7.902. Vyšetřete lokální extrémy funkcí:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x + 3$,

b) $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$,

c) $f(x,y) = xy \ln(x^2 + y^2)$,

d) $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$,

e) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$,

f) $f(x,y) = x^3y^2(12 - x - y)$

na množině $\{[x,y]; x > 0, y > 0\}$.

Řešení. a) ostré lok. min. v bodě $[-2,0]$,
b) ostré lok. min. v bodě $[0,0]$,
c) ostrá lok. min. hodnoty $-A^2$ v bodech $[A,A]$ a $[-A,-A]$, ostrá lok. max. hodnoty A^2 v bodech $[A,-A]$ a $[-A,A]$, kde $A = 1/\sqrt{2\,\mathrm{e}}$,
d) lok. max. v bodě $[2,-2]$,
e) ostré lok. min. v bodě $[-1,1]$,
f) ostré lok. max. v bodě $[6,4]$.

7.903. Vyšetřete absolutní extrémy funkcí na daných množinách:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$
na $\{[x,y]; x^2 + y^2 \le 4\}$,

b) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 8y$
na $\{[x,y]; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$,

c) $f(x,y) = x^2y(4 - x - y)$
na trojúhelníku ohraničeném přímkami
$x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$,

d) $f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$
na $\{[x,y]; 0 \le x \le \frac{1}{2}\pi, 0 \le y \le \frac{1}{2}\pi\}$,

e) $f(x,y) = \sin x \, \sin y \, \sin(x+y)$
na $\{[x,y]; 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$,

f) $f(x,y) = 1 + x + 2y$
na $\{[x,y]; 0 \le x, 0 \le y, x + y \le 1\}$,

g) $f(x,y) = xy$
na $\{[x,y]; x^2 + y^2 \le 2\}$,

h) $f(x,y) = x^2y$
na $\{[x,y]; x^2 + y^2 \le 1\}$,

i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
na $\{[x,y]; 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2\}$,

j) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$
na $\{[x,y]; 0 \le |x| + |y| \le 1\}$,

k) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$
na $\{[x,y]; x^2 + y^2 \le 4\}$,

l) $f(x,y) = \cos x \, \cos y \, \cos(x+y)$
na $\{[x,y]; 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$.

Řešení. a) $f_{max} = 4$ v bodech $[2,0]$ a $[-2,0]$, $f_{min} = -4$ v bodech $[0,2]$ a $[0,-2]$,
b) $f_{max} = 0$ v bodě $[0,0]$, $f_{min} = -16$ v bodě $[0,2]$,
c) $f_{max} = 4$ v bodě $[2,1]$, $f_{min} = -64$ v bodě $[4,2]$,
d) $f_{max} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ v bodě $[\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi]$, $f_{min} = 0$ v bodě $[0, \frac{1}{2}\pi]$,
e) $f_{max} = \frac{3}{8}\sqrt{3}$ v bodě $[\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi]$, $f_{min} = -\frac{3}{8}\sqrt{3}$ v bodě $[\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi]$,
f) $f_{max} = 3$ v bodě $[0,1]$, $f_{min} = 1$ v bodě $[0,0]$,
g) $f_{max} = 1$ v bodech $[1,1]$ a $[-1,-1]$, $f_{min} = -1$ v bodech $[1,-1]$ a $[-1,1]$,
h) $f_{max} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ v bodech $[\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}]$ a $[-\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}]$, $f_{min} = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$ v bodech $[\frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}]$ a $[-\frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}]$,
i) $f_{max} = 13$ v bodě $[2,-1]$, $f_{min} = -1$ v bodech $[0,-1]$, $[1,1]$,
j) $f_{max} = 1$ v bodech $[0,1]$, $[1,0]$, $[-1,0]$, $[0,-1]$, $f_{min} = 0$ v bodě $[0,0]$,
k) $f_{max} = 3/\mathrm{e}$ v bodech $[0,1]$, $[0,-1]$, $f_{min} = 0$ v bodě $[0,0]$,
l) $f_{max} = 1$ v bodech $[0,0]$, $[\pi,0]$, $[\pi,\pi]$, $[0,\pi]$, $f_{min} = -\frac{1}{8}$ v bodech $[\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi]$, $[\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi]$.

8.1. Jedna funkce jedné proměnné

8.101. Je zadaná funkce $F(x,y)$ a dvě čísla a, b taková, že $F(a,b)=0$. Dokažte, že v nějakém okolí O bodu a existuje funkce f proměnné x splňující $F(x,f(x))=0$ pro $x\in O$ a $f(a)=b$; určete $f'(a)$, jestliže

a) $F(x,y)=x^2+y^2-4x-10y+4\,,$

$$[a,b]=[6,2]\,,$$

b) $F(x,y)=x^2+y^2-4x-10y+4\,,$

$$[a,b]=[6,8]\,,$$

c) $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-3x^2y+y^3,$

$$[a,b]=[0,-1]\,,$$

d) $F(x,y)=2^y-x^2\,,[a,b]=[2,2]\,,$

e) $F(x,y)=x^4y+xy^4-\alpha x^2y^2-\alpha^5,$

$$[a,b]=[\alpha,\alpha]\,,\alpha\neq 0\,.$$

Řešení.

a) $\frac{4}{3}$, **b)** $-\frac{4}{3}$, **c)** 0, **d)** $1/\ln 2$, **e)** -1.

8.102. Je zadaná funkce $F(x,y)$ a dvě čísla a,b taková, že $F(a,b)=0$. Dokažte, že v nějakém okolí O bodu b existuje funkce g proměnné y splňující $F(g(y),y)=0$ pro $y\in O$ a $g(b)=a$; určete $g'(b)$, jestliže

a) $F(x,y)=x^2+y^2-4x-10y+4\,,$

$$[a,b]=[6,2]\,,$$

b) $F(x,y)=x^2+y^2-4x-10y+4\,,$

$$[a,b]=[-2,2]\,,$$

c) $F(x,y)=y^3-4xy+x^2,$

$$[a,b]=[2+\sqrt{3},1]\,,$$

d) $F(x,y)=y\sin x-\cos x+\cos 2x\,,$

$$[a,b]=[0,1]\,.$$

Řešení. a) $\frac{3}{4}$, **b)** $-\frac{3}{4}$, **c)** $2+\frac{5}{6}\sqrt{3}$, **d)** 0.

8.103. Funkce g $(y=g(x))$ je dána implicitně rovnicí $F(x,y)=0$ a podmínkou $g(x_0)=y_0$, kde $[x_0,y_0]$ je takový bod, že

$$F(x_0,y_0)=0 \quad\text{a}\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0.$$

V okolí bodu x_0 vyjádřete funkci $g'(x)$ (pomocí funkce $g(x)$), když

a) $F(x,y)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-1\,,$

b) $F(x,y)=x+y-\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,,$

c) $xy=\ln y+A\,,$

d) $x^2y^2-x^4-y^4=a^4\,,$

e) $x^3y-y^3x=a^4\,,$

f) $y\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0\,,$

g) $yx^2=\mathrm{e}^y\,.$

Řešení.

a) $g'(x)=-\Big(\frac{g(x)}{x}\Big)^{\frac{1}{3}}\,,$

b) $g'(x)=\dfrac{x^2+xg(x)+g^2(x)}{xg(x)}\,,$

c) $g'(x)=\dfrac{g^2(x)}{1-xg(x)}\,,$

d) $g'(x)=\dfrac{x(g^2(x)-2x^2)}{g(x)(2g^2(x)-x^2)}\,,$

e) $g'(x)=\dfrac{3x^2g(x)-g^3(x)}{3xg^2(x)-x^3}\,,$

f) $g'(x)=\dfrac{g(x)}{g(x)-1}\,,$

g) $g'(x)=\dfrac{2g(x)}{x(g(x)-1)}\,.$

8.104. Funkce g $(y=g(x))$ je dána implicitně rovnicí $F(x,y)=0$ a podmínkou $g(a)=b$. Určete $g'(a)$, $g''(a)$ (a v první úloze také $g'''(a)$), jestliže

a) $F(x,y)=x^2-xy+2y^2+x-y-1,$

$$[a,b]=[0,1]\,,$$

b) $F(x,y) = x^2 - y^3 + x^2y - 1\,,$

$$[a,b] = [1,0]\,,$$

c) $F(x,y) = x - y + 4\sin y\,,$

$$[a,b] = [0,0]\,,$$

d) $F(x,y) = y - x - \ln y\,,$

$$[a,b] = [\mathrm{e}-1, \mathrm{e}]\,.$$

Řešení.
a) $g'(0) = 0,\ g''(0) = g'''(0) = -\frac{2}{3},$
b) $g'(1) = -2,\ g''(1) = 6\,,$
c) $g'(0) = -\frac{1}{3},\ \ g''(0) = 0\,,$
d) $g'(\mathrm{e}-1) = \mathrm{e}/(\mathrm{e}-1),$
$g''(\mathrm{e}-1) = -\mathrm{e}/(\mathrm{e}-1)^3.$

8.2. Jedna funkce více proměnných

8.201. Funkce g proměnných x a y (tj. $z = g(x,y)$) je definovaná implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 0$ a podmínkou $g(a,b) = c$. Určete $g_x(a,b)$ a $g_y(a,b)$, jestliže

a) $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 2z + 3,$

$$[a,b,c] = [-1,2,-2],$$

b) $F(x,y,z) = z^4 - 4xyz - 1\,,$

$$[a,b,c] = [0,2,1]\,,$$

c) $F(x,y,z) = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1,$

$$[a,b,c] = [\tfrac{1}{3}\pi, \tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{6}\pi].$$

Řešení.
a) $g_x(a,b) = -\frac{1}{5}\,,\ \ g_y(a,b) = -\frac{3}{5}\,,$
b) $g_x(0,2) = 2\,,\ g_y(0,2) = 0\,,$
c) $g_x(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi) = -1, g_y(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi) = 0.$

8.202. Je dána rovnice

$$\mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0 \text{ a bod } [1,-6,0].$$

Určete:

a) $f'_x(1,-6)\,,\ \ f'_y(1,-6)\,,$ jestliže funkce f $(z = f(x,y))$ je definovaná implicitně danou rovnicí a podmínkou $f(1,-6) = 0\,.$

b) $g'_x(1,0)\,,\ g'_z(1,0)\,,$ jestliže funkce g $(y = g(x,z))$ je definovaná implicitně danou rovnicí a podmínkou $g(1,0) = -6\,.$

c) $h'_y(-6,0)\,,\ \ h'_z(-6,0)\,,$ jestliže funkce h $(x = h(y,z))$ je definovaná implicitně danou rovnicí a podmínkou $h(-6,0) = 1\,.$

Řešení.
a) $f'_x(1,-6) = 6\,,\ \ f'_y(1,-6) = -\frac{1}{2}\,,$
b) $g'_x(1,0) = 12\,,\ g'_z(1,0) = -2\,,$
c) $h'_y(-6,0) = \frac{1}{12}\,,\ h'_z(-6,0) = \frac{1}{6}\,.$

8.203. Funkce g $(u = g(x,y,z))$ je definovaná implicitně rovnicí $F(x,y,z,u) = 0$ a podmínkou $g(a,b,c) = d$. Ověřte, že funkce g je skutečně definována a určete

$$g'_x(a,b,c)\,,\ g'_y(a,b,c)\,,\ g'_z(a,b,c)\,,$$

jestliže:

a) $F(x,y,z,u) = u^3 + xyzu - 8,$

$$[a,b,c,d] = [0,1,1,2]\,,$$

b) $F(x,y,z,u) = x + y + z + u - \ln u - 1\,,$

$$[a,b,c,d] = [1,-\mathrm{e},1,\mathrm{e}]\,.$$

Řešení.
a) $g'_x(0,1,1) = -\frac{1}{6},$
$g'_y(0,1,1) = g'_z(0,1,1) = 0\,,$
b) $g'_x(1,-\mathrm{e},1) = g'_y(1,-\mathrm{e},1) =$
$= g'_z(1,-\mathrm{e},1) = \mathrm{e}/(1-\mathrm{e})\,.$

8.204. Funkce g $(z = g(x,y))$ je definovaná implicitně rovnicí

$$F(x,y,z) = 0$$

a podmínkou

$$g(x_0,y_0) = z_0,$$

kde $[x_0,y_0,z_0]$ je takový bod, že

$$F(x_0,y_0,z_0) = 0,\ F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0\,.$$

Určete funkce g'_x, g'_y (pomocí funkce g), jestliže

a) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2zx - 1,$

b) $F(x,y,z) = z^3 + 3xyz - 8,$

c) $F(x,y,z) = \mathrm{e}^z - xyz,$

d) $F(x,y,z) = \ln \dfrac{z}{y} + 1 - \dfrac{x}{z}.$

Řešení.
a) $g'_x = 1,\ g'_y = y/(x-g),$

b) $g'_x = -yg/(xy+g^2)$, $g'_y = -xg/(xy+g^2)$,
c) $g'_x = yg/(\mathrm{e}^g - xy)$, $g'_y = xg/(\mathrm{e}^g - xy)$,
d) $g'_x = g/(x+g)$, $g'_y = g^2/(xy+yg)$.

8.205. Funkce g $(z = g(x,y))$ je definovaná implicitně rovnicí

$$F(x,y,z) = 0$$

a podmínkou

$$g(a,b) = c.$$

Určete $g_{xx}(a,b)$, $g_{xy}(a,b)$ a $g_{yy}(a,b)$, jestliže

a) $F(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 1$,

$$[a,b,c] = [0,1,1],$$

b) $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - z - 1$,

$$[a,b,c] = [1,0,1],$$

c) $F(x,y,z) = x + y + z - \mathrm{e}^z$,

$$[a,b,c] = [\mathrm{e},-1,1].$$

Řešení.

a) $g_{xx}(0,1) = -1$,
$g_{xy}(0,1) = -\frac{1}{2}$, $g_{yy}(0,1) = \frac{1}{2}$,
b) $g_{xx}(1,0) = -\frac{39}{4}$,
$g_{xy}(1,0) = g_{yy}(1,0) = 0$,
c) $g_{xx}(\mathrm{e},-1) = g_{xy}(\mathrm{e},-1) =$
$g_{yy}(\mathrm{e},-1) = -\mathrm{e}/(1-\mathrm{e})^3$.

8.206. Funkce g $(z = g(x,y))$ je definovaná implicitně rovnicí

$$F(x,y,z) = 0$$

a podmínkou

$$g(a,b) = c.$$

Ověřte, že

$$F(a,b,c) = 0,\ F'_z(a,b,c) \neq 0\,.$$

Určete totální diferenciál $\mathrm{d}g(a,b)$, jestliže

a) $F(x,y,z) = x\sin z + y\cos z - \mathrm{e}^z$,

$$[a,b,c] = [0,1,0],$$

b) $F(x,y,z) = x^5 + y^5 + z^5 - x - y - z$,

$$[a,b,c] = [1,1,1].$$

Určete $\mathrm{d}g(a,b)$ a $\mathrm{d}^2g(a,b)$, jestliže

c) $F(x,y,z) = z^3 - xz + y$,

$$[a,b,c] = [3,-2,2],$$

d) $F(x,y,z) = x + y + z - \ln z - 1$,

$$[a,b,c] = [2,-\mathrm{e},\mathrm{e}].$$

Řešení.

a) $\mathrm{d}g(0,1) = \mathrm{d}y$,

b) $\mathrm{d}g(1,1) = -\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$,

c) $\mathrm{d}g(3,-2) = \frac{1}{9}(2\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)$,

$\mathrm{d}^2g(3,-2) = \frac{2}{243}(-2\mathrm{d}x^2 + 5\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\mathrm{d}y^2)$,

d) $\mathrm{d}g(2,-\mathrm{e}) = \frac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$,

$\mathrm{d}^2g(2,-\mathrm{e}) = \frac{\mathrm{e}}{(1-\mathrm{e})^3}(\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2)$.

8.3. Dvě funkce jedné proměnné

8.301. Funkce f a g $(x = f(z),\ y = g(z))$ jsou definovány rovnicemi

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}z^2,\ x + y + z = 2$$

a podmínkami $f(2) = 1$, $g(2) = -1$. Určete $f'(2)$, $g'(2)$ a $f''(2)$, $g''(2)$.

Řešení. $f'(2) = 0$, $g'(2) = -1$, $f''(2) = -\frac{1}{4}$, $g''(2) = \frac{1}{4}$.

8.302. Funkce f a g $(x = f(z),\ y = g(z))$ jsou definovány rovnicemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0$$

a podmínkami $f(z_0) = x_0$, $g(z_0) = y_0$, kde $[x_0, y_0, z_0]$ je takový bod, že

$$x_0 + y_0 + z_0 = 0,\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Určete $x'(z)$, $y'(z)$.

Řešení. $x'(z) = (y - z)/(x - y)$, $y'(z) = (z - x)/(x - y)$.

8.4. Tečna, tečná rovina, normála.

8.401. Napište rovnice tečny a normály v bodě P ke křivce zadané implicitně, jestliže

a) $x^3y + y^3x = 3 - x^2y^2$, $P = [1,1]$,

b) $\cos xy = x + 2y$, $P = [1,0]$,

c) $xy + \ln y - 1 = 0\,,\ P = [1,1]\,.$

Řešení.

a) tečna: $x + y - 2 = 0$, normála: $x - y = 0$,

b) tečna: $x + 2y - 1 = 0$,

normála: $2x - y - 2 = 0$,

c) tečna: $x + 2y - 3 = 0$,

normála: $2x - y - 1 = 0$.

8.402. Napište rovnice tečné roviny a normály v bodě P k ploše určené rovnicí:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 169\,,\ P = [3,4,12]\,,$

b) $x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{9}z^2 = 1\,,\ P = [1,-2,3]\,,$

c) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0\,,$

$P = [1,2,-1]\,,$

d) $z = y + \ln \dfrac{x}{z}\,,\ P = [1,1,1]\,.$